

Devoir libre n°01

2TSI. Informatique

A rendre le jeudi 19 octobre 2017 au plus tard

Dans les deux exercices, on aura à écrire des programmes en langage Python. Vous pourrez agrémentez vos programmes en les faisant fonctionner avec un ordinateur.

Les deux exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre, bien que faire l'exercice 01 puisse être une aide pour démarrer l'exercice 02. On rappelle qu'un nombre est premier si et seulement s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exercice 01

Posé à l'écrit du concours E3A (Arts et Metiers ParisTech) pour la filière PSI en 2016

1. On donne les programmes Python $P0$ et $P1$ suivants.

```
>>> def P0(N) : N entier naturel
    if N == 1 :
        return False
    if N == 2 :
        return True
    for d in range(2,N) :
        if N % d == 0 :
            return False
    return True
```

```
>>> def P1(N) : N entier naturel
    if N == 1 :
        return False
    if N == 2 :
        return True
    for d in range(2,N) :
        if N % d == 0 :
            return False
    return True
```

Que renvoient les appels $P0(5)$, $P1(5)$ et $P0(9)$, $P1(9)$?

Dire en une phrase ce que fait chacun des programmes $P0$ et $P1$?

2. En une phrase, dire ce que fait le programme Python $P2$, qui utilise le programme $P1$ précédent ?

```
>>> def P2(N) : N entier naturel
    L = []
    k = 0
    n = k*k + 1
    while n <= N :
        if P1(n) :
            L.append(n)
        k = k + 1
        n = k*k + 1
    return L
```

Que renvoie l'appel $P2(127)$?

3. Écrire une fonction *nextPrime* en langage Python qui prend un argument entier N et qui retourne comme valeur le premier nombre premier qui est strictement supérieur à N .
4. On appelle ***couple de nombres premiers jumeaux*** toute liste $[p, q]$ telle que p et q soient deux nombres premiers vérifiant $p < q$ et $q = p + 2$. Par exemple, $[3, 5]$ et $[11, 13]$ sont des couples de nombres premiers jumeaux.
 - (a) Écrire, à l'aide de la fonction *nextPrime* précédente, une fonction Python nommée *jumeau*, prenant comme argument un entier N et renvoyant le couple $[p, q]$ de nombres premiers jumeaux tels que p soit strictement supérieur à N et le plus petit possible.
Par exemple `>>> jumeau(5)` renvoie comme valeur $[11, 13]$.
 - (b) Écrire avec les mêmes consignes une fonction, *lesJumeaux*, prenant en argument un entier N et renvoyant la liste de tous les couples de nombres premiers jumeaux $[p, q]$ tels que q soit inférieur ou égal à N .
Par exemple : `>>> lesJumeaux(18)` retourne : $[[3, 5], [5, 7], [11, 13]]$
(Le couple $[17, 19]$ n'en fait donc pas partie.)

Exercice 02

Posé à l'oral de l'ENSAM pour la filière PSI en 2016

On pourra au fil des questions utiliser les fonctions construites dans les questions précédentes.

1. Écrire une fonction *divise*(p, q) d'argument deux entiers naturels non nuls p et q , renvoyant *True* si p divise q et *False* sinon.
2. Écrire une fonction *estpremier*(p) d'argument un entier naturel p , renvoyant 1 si p est premier et 0 sinon.
3. Déterminer à la main le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à p pour tout entier p compris entre 1 et 20.
Écrire une fonction *phi*(p) d'argument un entier naturel p , renvoyant le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à p .
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\phi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n . Pour la suite de l'exercice, on admettra le résultat suivant : $\phi(n) \sim \frac{n}{\ln(n)}$ quand n tend vers $+\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\Theta(n) = \left| \frac{\phi(n) \ln n}{n} - 1 \right|$.
 - (a) Calculer $\Theta(n)$ pour $n \in \llbracket 1, 20 \rrbracket$.
 - (b) Rappeler la définition de deux suites équivalentes (les suites envisagées seront supposées n'avoir aucun terme nul).
 - (c) Avec le résultat admis, prouver qu'il existe une infinité de nombres premiers.
 - (d) Écrire une fonction *test*(*epsilon*) d'argument un réel *epsilon* strictement positif, renvoyant le premier entier naturel $N \geq 50$ tel que $\Theta(N) \leq \epsilon$.
 - (e) Donner une suite d'instructions permettant de tracer le graphe de la fonction Θ sur $\llbracket 50, 5000 \rrbracket$.