Devoir surveillé n°02
CORRECTION

2TSI. Mathématiques

Exercice 01

1) On note donc :

$$\mathcal{B}_n = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\, \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\, A_{i,j} \in \{-1,1\}\right\},$$

$$\mathcal{G}_n = \{A \in \mathcal{B}_n,\, A \text{ est inversible }\},\, \mathcal{H}_n = \left\{A \in \mathcal{B}_n,\, A^T A = nI_n\right\}.$$

Dans cette question, on est dans le cas $n = 2$. On doit trouver deux matrices A_2 et A'_2 de $\mathcal{B}_2$, telles que $A_2 \in \mathcal{H}_2$ et $A'_2 \notin \mathcal{G}_2$.
La plus simple à trouver est la deuxième.
Posons $A'_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est bien dans $\mathcal{B}_2$ et on remarque que A'_2 n'est pas inversible. En effet, ses deux colonnes sont opposées et donc le rang de A'_2 est $1 < 2$. On peut aussi remarquer que :

$${A'_2}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc : $\mathsf{Det}\,(A'_2) = 0$ et A'_2 n'est pas inversible.
Pour A_2, on commence par remarquer que :

$$A_2^T A_2 = 2I_2 \Rightarrow \mathsf{Det}\,\left(A_2^T\right)\mathsf{Det}\,(A_2) = \mathsf{Det}\,(A_2)^2 = \mathsf{Det}\,(2I_2) = 4.$$

On va choisir une matrice de rang 2, remplies que de 1 et -1, et de déterminant égal à 2.
On choisit $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a :

$$A_2^T A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2.$$

Donc $A_2 \in \mathcal{H}_2$. On résume. On peut choisir :

$$\boxed{A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A'_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.}$$

2) On pose dans cette question $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Comme A_3 a pour coefficients seulement -1 ou 1, $A_3 \in \mathcal{B}_3$.
Pour la suite, calculons le déterminant de A_3. On écrit :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

en effectuant d'abord les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ pour obtenir le second déterminant puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ pour obtenir le troisième déterminant. Il reste un déterminant triangulaire supérieur dont la valeur est le produit des éléments de la diagonale principale. Alors : $\mathsf{Det}\,A_3 = 4 \neq 0$. Donc $A_3 \in \mathcal{G}_3$.
Si $A_3^T A_3 = 3I_3$ alors $\mathsf{Det}\,(A_3)^2 = 27 \neq 16$ et $A_3 \notin \mathcal{H}_3$. Ainsi :

$$\boxed{A_3 \in \mathcal{B}_3,\, A_3 \in \mathcal{G}_3 \text{ et } A_3 \notin \mathcal{H}_3.}$$

3)a) On pose maintenant : $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On commence par le calcul de $\mathsf{Det}\, A_4$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix},$$

en effectuant les opérations : $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 + L_1$. Puis :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix},$$

en effectuant l'opération : $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$. Puis :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix},$$

en effectuant l'opération : $L_2 \leftrightarrow L_4$. Et enfin :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix},$$

en effectuant l'opération : $L_4 \leftarrow L_4 + L_3$. Il reste un déterminant triangulaire supérieur dont la valeur est le produit des éléments de la diagonale principale. Ainsi :

$$\boxed{\mathsf{Det}\ (A_4) = -1 \times 2 \times (-2) \times 4 = 16.}$$

3)b) On remarque que A_4 est symétrique, c'est-à-dire que $A_4^T = A_4$. On a rapidement :

$$A_4^T A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_4.$$

Donc,

$$\boxed{A_4 \in \mathcal{H}_4.}$$

Enfin, $\mathsf{Det}\ \left(A_4^T A_4\right) = \mathsf{Det}\ (A_4)^2 = \mathsf{Det}\ (4I_4) = 4^4 \Rightarrow \mathsf{Det}\ (A_4) = 4^2 = 16.$

$$\boxed{\text{On retrouve } \mathsf{Det}\ (A_4) = 16.}$$

3)c) ϕ est une symétrie vectorielle si et seulement si $\phi\, o\, \phi = Id$. Il suffit de prouver que $S^2 = I_4$. On écrit :

$$S^2 = \frac{1}{4} A_4^2 = \frac{1}{4} 4I_4 = I_4.$$

On peut conclure :

$$\boxed{\phi \text{ est une symétrie vectorielle}}$$

Déterminons une base de Ker $(\phi - Id_{\mathbb{R}^4})$.

Le vecteur $\vec{u}(x,y,z,t)$ (ses composantes sont prises dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$) appartient à Ker $(\phi - Id_{\mathbb{R}^4})$ si et seulement si $\phi(\vec{u}) = \vec{u}$, et donc si et seulement si :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} . = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y-z-t & = & 2x \\ x+y+z+t & = & 2y \\ -x+y-z+t & = & 2z \\ -x+y+z-t & = & 2t \end{array}\right. .$$

Cela donne :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z+t & = & 0 \\ -x+y-z-t & = & 0 \\ x-y+3z-t & = & 0 \\ x-y-z+3t & = & 0 \end{array}\right. .$$

On remarque que les deux premières lignes du dernier système sont équivalentes et que si l'on enlève la troisième ligne à la quatrième, on obtient :

$$-4z + 4t = 0 \Rightarrow z = t.$$

En remplaçant dans la première égalité, il reste :

$$x - y + 2t = 0 \Rightarrow x = y - 2t.$$

On en déduit alors :

$$(x,y,z,t) = (y-2t, y, t, t) = y(1,1,0,0) + t(-2,0,1,1).$$

Les deux vecteurs $\vec{u}_1(1,1,0,0)$ et $\vec{u}_2(-2,0,1,1)$ forment une famille génératrice de Ker $(\phi - Id_{\mathbb{R}^4})$ et ne sont pas liés, on peut conclure :

$$\boxed{\{\vec{u}_1(1,1,0,0),\ \vec{u}_2(-2,0,1,1)\} \text{ est une base de Ker } (\phi - Id_{\mathbb{R}^4})\,.}$$

Déterminons une base de Ker $(\phi + Id_{\mathbb{R}^4})$.
Le vecteur $\vec{u}(x,y,z,t)$ (ses composantes sont prises dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$) appartient à Ker $(\phi + Id_{\mathbb{R}^4})$ si et seulement si $\phi(\vec{u}) = -\vec{u}$, et donc si et seulement si :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} . = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \\ -t \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y-z-t & = & -2x \\ x+y+z+t & = & -2y \\ -x+y-z+t & = & -2z \\ -x+y+z-t & = & -2t \end{array}\right. .$$

Cela donne :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+y-z-t & = & 0 \\ x+3y+z+t & = & 0 \\ -x+y+z+t & = & 0 \\ -x+y+z+t & = & 0 \end{array}\right. .$$

On remarque que les deux dernières lignes du dernier système sont égales et que si l'on ajoute la première ligne à la deuxième, on obtient :

$$4x + 4y = 0 \Rightarrow x = -y.$$

En remplaçant dans la troisième égalité, il reste :

$$2y + z + t = 0 \Rightarrow z = -2y - t.$$

On en déduit alors :

$$(x,y,z,t) = (-y, y, -2y-t, t) = y(-1,1,-2,0) + t(0,0,-1,1).$$

Les deux vecteurs $\vec{u}_3(-1,1,-2,0)$ et $\vec{u}_4(0,0,-1,1)$ forment une famille génératrice de Ker $(\phi + Id_{\mathbb{R}^4})$ et ne sont pas liés, on peut conclure :

$$\boxed{\{\vec{u}_3(-1,1,-2,0),\ \vec{u}_4(0,0,-1,1)\} \text{ est une base de Ker } (\phi + Id_{\mathbb{R}^4})\,.}$$

3)d) On veut montrer que Ker $(\phi - Id_{\mathbb{R}^4})$ et Ker $(\phi + Id_{\mathbb{R}^4})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$. Il y a plusieurs méthodes. Le plus simple est de remarquer que la famille $\{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3,\ \vec{u}_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$. En effet, cette famille est composée de quatre vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 4. Il suffit soit de prouver sa liberté (et donc de résoudre un système homogène), soit de vérifier que le déterminant de cette famille est non nul. C'est ce que nous allons faire. Le déterminant Δ de la famille $\{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3,\ \vec{u}_4\}$ vaut :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

en faisant les opérations : $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$. Il reste :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0.$$

On peut conclure :

$$\boxed{\text{Ker } (\phi - Id_{\mathbb{R}^4}) \text{ et Ker } (\phi + Id_{\mathbb{R}^4}) \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^4.}$$

3)e) Posons $\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1(1,1,0,0),\ \vec{u}_2(-2,0,1,1),\ \vec{u}_3(-1,1,-2,0),\ \vec{u}_4(0,0,-1,1)\}$.
Comme $\{\vec{u}_1(1,1,0,0),\ \vec{u}_2(-2,0,1,1)\}$ est une base de Ker $(\phi - Id_{\mathbb{R}^4})$, $\phi(\vec{u}_1) = \vec{u}_1$ et $\phi(\vec{u}_2) = \vec{u}_2$.
Comme $\{\vec{u}_3(-1,1,-2,0),\ \vec{u}_4(0,0,-1,1)\}$ est une base de Ker $(\phi + Id_{\mathbb{R}^4})$, $\phi(\vec{u}_3) = -\vec{u}_3$ et $\phi(\vec{u}_4) = -\vec{u}_4$.
La matrice $M_{\mathcal{B}'}(\phi)$ de ϕ dans la base de $\mathbb{R}^4$, réunion de la base de Ker $(\phi - Id_{\mathbb{R}^4})$ et celle de Ker $(\phi + Id_{\mathbb{R}^4})$ est :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

On remarque que cette matrice est diagonale. On dit en deuxième année que ϕ est diagonalisable et que $M_{\mathcal{B}'}(\phi)$ est sa matrice dans une base de diagonalisation.
4) Pour tout $n \geqslant 2$, il est clair que par définition, $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{B}_n$ et que $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{B}_n$.
Il reste à montrer que $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{G}_n$. Si $A \in \mathcal{H}_n$,

$$\mathsf{Det}\left(A^T A\right) = \left(\mathsf{Det}\,(A)\right)^2 = \mathsf{Det}\,(nI_n) = n^n \Rightarrow \mathsf{Det}\,(A) \neq 0.$$

. Donc A est inversible. On a bien : $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{G}_n$. En conclusion,

$$\boxed{\mathcal{H}_n \subset \mathcal{G}_n \subset \mathcal{B}_n}$$

Soit $A \in \mathcal{B}_n$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $A_{i,j} \in \{-1,1\}$, donc chaque coefficient de A a deux valeurs possibles. Et A possède n^2 coefficients. Compter le nombre de matrices A dans $\mathcal{B}_n$, c'est compter le nombre d'applications d'un ensemble E_1 de cardinal n^2 vers un ensemble E_2 de cardinal 2. Les n^2 éléments de E_1 sont les coefficients $A_{i,j}$ et les deux éléments de E_2 sont les entiers 1 et -1. Il y a 2^{n^2} telles applications.

$$\boxed{\text{Le nombre d'éléments de } \mathcal{B}_n \text{ est } 2^{n^2}.}$$

5)a) Soit $A \in \mathcal{G}_n$. On transforme A en A' par les $n-1$ opérations élémentaires :

$$\forall i \in [\![2,n]\!],\ L_i(A) \leftarrow A_{1,1}L_i(A) - A_{i,1}L_1(A).$$

Écrivons : $\mathsf{Det}\,(A') = \mathsf{Det}\,(L_1(A'),\, L_2(A'),\, ...,\, L_n(A'))$. (On peut écrire un déterminant comme une application multilinéaire de variables les lignes du déterminant aussi bien que les colonnes du déterminant car la transposition conserve la valeur du déterminant.)
Dans $\mathsf{Det}\,(A')$, on remplace pour tout $i \in [\![2,n]\!]$, $L_i(A')$ par $A_{1,1}L_i(A) - A_{i,1}L_1(A)$.

Alors $\mathsf{Det}\,(A')$ s'écrit :

$$\mathsf{Det}\,(L_1(A), A_{1,1}L_2(A) - A_{2,1}L_1(A), A_{1,1}L_3(A) - A_{3,1}L_1(A), ..., A_{1,1}L_n(A) - A_{n,1}L_1(A))\,.$$

On utilise la linéarité de ce déterminant selon la deuxième variable. Donc $\mathsf{Det}\,(A')$ se décompose en somme de

$$A_{1,1}\mathsf{Det}\,(L_1(A), L_2(A), A_{1,1}L_3(A) - A_{3,1}L_1(A), ..., A_{1,1}L_n(A) - A_{n,1}L_1(A))$$

et de

$$-A_{2,1}\mathsf{Det}\,(L_1(A), L_1(A), A_{1,1}L_3(A) - A_{3,1}L_1(A), ..., A_{1,1}L_n(A) - A_{n,1}L_1(A))\,.$$

On remarque que le second déterminant est nul car la première et la seconde variable ont $L_1(A)$ pour valeur commune. Il reste :

$$\mathsf{Det}\,(A') = A_{1,1}\mathsf{Det}\,(L_1(A), L_2(A), A_{1,1}L_3(A) - A_{3,1}L_1(A), ..., A_{1,1}L_n(A) - A_{n,1}L_1(A))$$

Puis ensuite, on utilise la linéarité selon la troisième variable de ce dernier déterminant :

$$A_{1,1}\mathsf{Det}\,(L_1(A), L_2(A), A_{1,1}L_3(A) - A_{3,1}L_1(A), ..., A_{1,1}L_n(A) - A_{n,1}L_1(A))\,.$$

Il peut s'écrire comme somme de

$$A_{1,1}^2\mathsf{Det}\,(L_1(A), L_2(A), L_3(A), A_{1,1}L_4(A) - A_{4,1}L_1(A), ..., A_{1,1}L_n(A) - A_{n,1}L_1(A))$$

et de

$$-A_{1,1}A_{3,1}\mathsf{Det}\,(L_1(A), L_2(A), L_1(A), A_{1,1}L_4(A) - A_{4,1}L_1(A), ..., A_{1,1}L_n(A) - A_{n,1}L_1(A))\,.$$

Encore une fois, on remarque que le second déterminant est nul. Il reste :

$$\mathsf{Det}\,(A') = A_{1,1}^2\mathsf{Det}\,(L_1(A), L_2(A), L_3(A), A_{1,1}L_4(A) - A_{4,1}L_1(A), ..., A_{1,1}L_n(A) - A_{n,1}L_1(A))\,.$$

On continue ainsi de suite. De façon générale, en supposant $n \geqslant 4$, pour tout entier k entre 2 et $n-2$:

$$\mathsf{Det}\,(A') = \\ A_{1,1}^k\mathsf{Det}\,(L_1(A), L_2(A), ..., L_{k+1}(A), A_{1,1}L_{k+2}(A) - A_{k+2,1}L_1(A), ..., A_{1,1}L_n(A) - A_{n,1}L_1(A))\,.$$

Il reste pour $k = n-2$:

$$\mathsf{Det}\,(A') = A_{1,1}^{n-2}\mathsf{Det}\,(L_1(A), L_2(A), ..., L_{n-1}(A), A_{1,1}L_n(A) - A_{n,1}L_1(A))\,.$$

En utilisant enfin la linéarité selon la dernière variable,

$$\mathsf{Det}\,(A') = A_{1,1}^{n-1}\mathsf{Det}\,(L_1(A), L_2(A), ..., L_{n-1}(A), L_n(A))\,.$$

On peut conclure :

$$\boxed{\mathsf{Det}\,(A') = A_{1,1}^{n-1}\mathsf{Det}\,(A).}$$

5)b) Les opérations élémentaires sur les lignes qui sont proposées transforment pour tout i entier de 2 à n, la ligne $L_i(A)$ en une ligne $L_i\,(A')$ de premier coefficient :

$$A'_{i,1} = A_{1,1}A_{i,1} - A_{i,1}A_{1,1} = 0.$$

Puis de second coefficient :

$$A'_{i,2} = A_{1,1}A_{i,2} - A_{i,1}A_{1,2},$$

et de façon générale pour tout j entier entre 2 et n, le $j^{\text{ème}}$ nouveau coefficient est :

$$A'_{i,j} = A_{1,1}A_{i,j} - A_{i,1}A_{1,j}.$$

Donc :

$$\boxed{A' \text{ est bien de la forme } \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \text{ où } B' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}).}$$

La matrice $B' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ est inversible car en développant $\mathsf{Det}\,(A')$ selon sa première colonne, on a :

$$\mathsf{Det}\,(A') = A_{1,1}\mathsf{Det}\,(B') = \pm\mathsf{Det}\,(B').$$

Comme $A \in \mathcal{G}_n$, A est inversible et $\mathsf{Det}\,(A) \neq 0$. Donc $\mathsf{Det}\,(A') \neq 0$ et par conséquent, $\mathsf{Det}\,(B') \neq 0$.

$$\boxed{B' \text{ est inversible}}$$

Pour tout $i \in [\![2,n]\!]$ et pour tout $j \in [\![2,n]\!]$, le coefficient $A'_{i,j}$ est égal à $B'_{i-1,j-1}$. Donc $B'_{i-1,j-1}$ vaut $A_{1,1}A_{i,j} - A_{i,1}A_{1,j}$. On sait que les quatre coefficients $A_{1,1}$, $A_{i,j}$, $A_{i,1}$ et $A_{1,j}$ valent ± 1. Donc l'expression $A_{1,1}A_{i,j} - A_{i,1}A_{1,j}$ vaut $-1-(-1)$ ou $-1-1$ ou $1-(-1)$ ou enfin $1-1$, c'est-à-dire 0, -2 ou 2. On peut conclure :

$$\boxed{\text{Pour tout } (i,j) \in [\![1,n-1]\!]^2,\ B'_{i,j} \in \{-2,0,2\}.}$$

5)c) On sait que $\mathsf{Det}\,(A) = \pm\mathsf{Det}\,(B')$. Comme pour tout $(i,j) \in [\![1,n-1]\!]^2$, $B'_{i,j} \in \{-2,0,2\}$, alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n-1]\!]^2$, $\dfrac{1}{2}B'_{i,j} \in \{-1,0,1\}$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n-1]\!]^2$, notons $B'' = \dfrac{1}{2}B'$. Alors :

$$B' = 2B'' \Rightarrow \mathsf{Det}\,(B') = 2^{n-1}\mathsf{Det}\,(B'')$$

car B' et B'' sont des matrices carrées d'ordre $n-1$. Enfin, $\mathsf{Det}\,(B'')$ est un entier relatif car ses coefficients sont des entiers relatifs (0, -1 ou 1 plus précisément). Donc $\mathsf{Det}\,(B')$ est un multiple de 2^{n-1} et il en est de même de $\mathsf{Det}\,(A)$:

$$\boxed{\mathsf{Det}\,(A) \text{ est un multiple de } 2^{n-1}.}$$

5)d) On suppose ici $A \in \mathcal{H}_n$ et $n \geqslant 3$. On sait d'après plus haut que

$$(\mathsf{Det}\,(A))^2 = n^n \Rightarrow |\mathsf{Det}\,(A)| = n^{\frac{n}{2}}.$$

On sait donc que $\mathsf{Det}\,(A)$ est un multiple de 2^{n-1} et vaut $\pm n^{\frac{n}{2}}$.
Supposons que n soit impair, alors $n^{\frac{n}{2}}$ est impair (s'il est entier). En effet, si par l'absurde, $n^{\frac{n}{2}}$ est un entier pair, n^n aussi (c'est même un multiple de 4) et comme n est impair, n^n est un produit d'entiers impairs et est donc impair, ce qui est absurde. On peut en déduire déjà que n est nécessairement pair.
Écrivons alors $n = 2p$, où p est un entier supérieur ou égal à 2. La quantité $\mathsf{Det}\,(A)$ vaut $\pm(2p)^p$ et est un multiple de 2^{2p-1}. C'est-à-dire que 2^{2p-1} divise $2^p p^p$. Donc 2^{p-1} divise p^p et comme $p \geqslant 2$, en particulier 2 divise p^p. L'entier p est nécessairement pair et n est un multiple de 4.

$$\boxed{|\mathsf{Det}\,(A)| = n^{\frac{n}{2}} \text{ et } n \text{ est un multiple de } 4.}$$

Remarque

On vient de montrer que pour que $A \in \mathcal{B}_n$ soit aussi dans $\mathcal{H}_n$, il faut que n soit un multiple de 3. Ainsi, on ne peut pas trouver une telle matrice si $n = 3$. J'espère qu'à la question **2)** vous n'avez pas répondu que $A_3 \in \mathcal{H}_3$.

Exercice 02

1) Ici $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout n-uplet $(x_1,...,x_n) \in \mathbb{K}^n$, on note $V_n(x_1,x_2,...,x_n)$ la **matrice de Vandermonde** définie par :

$$V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On note $|V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)|$ le déterminant de $V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.
C'est le **déterminant de Vandermonde** du n-uplet $(x_1, x_2..., x_n)$.
On suppose que les scalaires $x_1, x_2, ..., x_n$ ne sont pas tous distincts. Supposons par exemple $x_i = x_j$, où i et j sont deux entiers différents et compris entre 1 et n. Alors les colonnes C_i et C_j de la matrice de Vandermonde $V_n(x_1, ..., x_n)$ sont égales. On sait qu'un déterminant qui a deux colonnes égales est nul. Donc :

$$\boxed{|V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)| = 0.}$$

2) On a rapidement :

$$|V_2(x_1, x_2)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1.$$

Finalement :

$$\boxed{|V_2(x_1, x_2)| = x_2 - x_1.}$$

3)a) Dans cette question et toute la suite, **on suppose $n \geqslant 3$ et les scalaires $x_1, x_2, ..., x_n$ sont deux à deux distincts**.
On note F la fonction définie sur $\mathbb{K}$ par : $F(x) = |V_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x)|$. On a :

$$F(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On développe $F(x)$ par rapport à sa dernière colonne :

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} \Delta_{k,n} \, x^{k-1},$$

où $\Delta_{k,n}$ est le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en enlevant à la matrice initiale la dernière colonne et la $i^{\text{ème}}$ ligne. Chaque déterminant $\Delta_{k,n}$ n'a pas de terme de x et sa valeur est constante par rapport à x. Ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} \Delta_{k,n} \, x^{k-1}$ est un polynôme en x dont le degré ne dépasse pas $n-1$.
Par ailleurs, son coefficient dominant est le coefficient devant x^{n-1}, c'est-à-dire $(-1)^{n+n}\Delta_{n,n} = \Delta_{n,n}$. Or :

$$\Delta_{n,n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-2}^{n-2} \end{pmatrix} = |V_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})|.$$

On peut conclure :

$$\boxed{F \in \mathbb{K}_{n-1}[X], \text{ de coefficient dominant } |V_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})|.}$$

3)b) Si l'on remplace x par x_i, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, le déterminant $F(x_i)$ a deux colonnes identiques : la $i^{\text{ème}}$ et la $n^{\text{ème}}$. Il est donc nul. Donc :

$$\boxed{\text{les scalaires } x_1, x_2, ..., x_{n-1} \text{ sont des racines de } F.}$$

Remarque

on peut même conclure que comme F est un polynôme de degré au plus $n-1$ et comme $x_1, ..., x_{n-1}$ sont $n-1$ racines distinctes de F, si F n'est pas le polynôme nul, F a exactement $n-1$ racines qui sont $x_1, ..., x_{n-1}$. Cette remarque va servir dans la suite.

3)c) En utilisant le résultat de la question **3)a)**, on peut dire que si $|V_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})|$ est nul, alors F est nul car c'est alors un polynôme de degré au plus $n-2$ ayant $n-1$ racines distinctes et si $|V_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})|$ n'est pas nul, F est un polynôme de degré exactement $n-1$ dont les racines sont $x_1, ..., x_{n-1}$. Il s'écrit dans tous les cas sous la forme :

$$F(x) = |V_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x)| = |V_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})| \prod_{k=1}^{n-1} (x - x_k).$$

On applique avec $x = x_n$ et on obtient :

$$\boxed{|V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)| = |V_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})| \prod_{k=1}^{n-1} (x_n - x_k).}$$

4) Nous allons procéder à une récurrence.
Pour tout entier $p \in [\![2, n]\!]$, appelons $\mathcal{P}_p$ la proposition : $|V_p(x_1, x_2, \cdots, x_p)| = \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant p} (x_j - x_i).$

On peut vérifier que $\mathcal{P}_2$ est vraie. En effet, d'après la question **2)**,

$$|V_2(x_1, x_2)| = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 2} (x_j - x_i).$$

Supposons que la proposition $\mathcal{P}_{p-1}$ soit vraie pour p entier fixé dans $[\![3, n]\!]$, alors en utilisant le résultat de la question **3)c)**, appliqué à p à la place de n,

$$|V_p(x_1, x_2, \cdots, x_p)| = |V_{p-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{p-1})| \prod_{k=1}^{p-1} (x_p - x_k).$$

Puis, on utilise l'hypothèse de récurrence,

$$|V_p(x_1, x_2, \cdots, x_p)| = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant p-1} (x_j - x_i) \prod_{k=1}^{p-1} (x_p - x_k),$$

c'est-à-dire :

$$|V_p(x_1, x_2, \cdots, x_p)| = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant p} (x_j - x_i).$$

C'est bien $\mathcal{P}_p$. Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie.

$$\boxed{|V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)| = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).}$$

5) Comme tous les scalaires x_i pour i variant de 1 à n, sont distincts, la quantité $\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$ ne s'annule pas et $|V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)|$, qui n'est autre que le déterminant de la matrice $V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, est non nul.

$$\boxed{\text{La matrice } V_n(x_1, x_2, ..., x_n) \text{ est donc inversible.}}$$

6) Une application : soient a, b, c trois réels deux à deux distincts. Pour démontrer l'égalité proposée, on peut développer le déterminant de gauche directement ou après avoir fait des différences de colonnes pour mettre des quantités du type $a-b$, $a-c$ ou $b-c$ en facteur et développer le membre de droite. Puis remarquer qu'ils sont égaux. On est incité à faire autre chose, sachant que l'égalité à montrer est classée dans l'énoncé comme application du déterminant de Vandermonde. On va utiliser $F(x) = |V_4(a, b, c, x)|$ et bien entendu les résultats précédents.

On commence par écrire que :

$$F(x) = |V_4(a,b,c,x)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & x^3 \end{vmatrix}.$$

La seule différence entre $F(x)$ et le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & b & c & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 2a \\ a^3 & b^3 & c^3 & 3a^2 \end{vmatrix}$ est au niveau de la $4^{\text{ème}}$ colonne. On remarque que la $4^{\text{ème}}$ colonne de Δ correspond à la dérivation par x de celle de $F(x)$ et en posant ensuite $x = a$. Comme $F(x)$ est un polynôme de degré au plus 3 en x, on peut effectivement le dériver (c'est ici que l'hypothèse $x \in \mathbb{R}$ intervient, en effet, au programme officiel, on n'a pas le droit de dériver une fonction à variable complexe) et :

$$\Delta = F'(a).$$

Il reste à expliciter $F(x)$ en utilisant ce qui précède :

$$F(x) = |V_4(a,b,c,x)| = |V_3(a,b,c)|\,(x-a)(x-b)(x-c),$$

c'est-à-dire :

$$F(x) = (b-a)(c-a)(c-b)(x-a)(x-b)(x-c).$$

Il reste à dériver. On peut utiliser la formule :

$$[u(x)v(x)w(x)]' = u'(x)v(x)w(x) + u(x)v'(x)w(x) + u(x)v(x)w'(x),$$

où u, v et w sont trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la quantité $F'(x)$ vaut :

$$(b-a)(c-a)(c-b)\left[(x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)\right].$$

On applique avec $x = a$, ce qui donne :

$$\Delta = (b-a)(c-a)(c-b)\left[(a-b)(a-c) + (a-a)(a-c) + (a-a)(a-b)\right],$$

c'est-à-dire :

$$\Delta = (b-a)(c-a)(c-b)(a-b)(a-c) = (a-b)^2(a-c)^2(c-b).$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & b & c & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 2a \\ a^3 & b^3 & c^3 & 3a^2 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a-c)^2(c-b).}$$

Exercice 03

1) Pour tout entier naturel n, on note $e_n : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^n e^{-x}$.
Soient $N \in \mathbf{N}^\star$ et E est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$, défini par $E = \mathsf{Vect}\,(e_0, e_1, ..., e_N)$.
La famille $\mathcal{B} = (e_0, e_1, ..., e_N)$ est une famille génératrice de E. Il suffit de démontrer qu'elle est libre.
On écrit l'égalité (1) : $\alpha_0 e_0 + ... + \alpha_N e_N = 0$. Cela donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \alpha_0 e^{-x} + \alpha_1 x e^{-x} + ... + \alpha_N x^N e^{-x} = 0.$$

C'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_N x^N = 0.$$

Un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls.
On a donc : $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_N = 0$. La famille $\mathcal{B}$ est libre et est donc une base de E.
Comme elle est composée de $N+1$ éléments, $\dim E = N+1$.

$$\boxed{\mathcal{B} = (e_0, e_1, ..., e_N) \text{ est une base de } E \text{ et } \dim E = N+1.}$$

2)a) Pour tout $g \in E$, on note : $\Delta(g) = g'$.
Δ est clairement linéaire car pour tout $(f,g) \in E^2$ et tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\Delta(f + ag) = (f + ag)' = f' + ag' = \Delta(f) + a\Delta(g).$$

Puis, $\Delta(e_0)(x) = -e^{-x} = -e_0(x)$ et pour tout $k \in [\![1, N]\!]$,

$$\Delta(e_k)(x) = (e^{-x}x^k)' = -e^{-x}x^k + ke^{-x}x^{k-1} = -e_k(x) + ke_{k-1}(x).$$

On remarque que les images des vecteurs de la base de E sont des vecteurs de E. Donc $\operatorname{Im}\Delta \subset E$. On peut conclure :

$$\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

2)b) Écrivons la matrice A de Δ dans la base $\mathcal{B}$, en utilisant ce qui précède.

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

Comme son déterminant vaut $(-1)^{N+1} \neq 0$, A est inversible et donc :

$$\boxed{\Delta \text{ est un automorphisme de } E.}$$

2)c) On commence par déterminer le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(X) = \operatorname{Det}(XI_{N+1} - A) = \begin{vmatrix} X+1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & X+1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X+1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & X+1 & -N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & X+1 \end{vmatrix} = (X+1)^{N+1}.$$

On en déduit que -1 est la seule valeur propre de A.
On voit rapidement que le sous-espace propre associé est $E_{-1}(A) = \operatorname{Vect}(e_0)$.
L'endomorphisme Δ n'est pas diagonalisable.
On aurait aussi pu dire que si Δ avait été diagonalisable, comme -1 est la seule valeur propre, il aurait été égal à $-Id$, ce qui n'est pas le cas.