Devoir surveillé 04

CORRECTION

Exercice 01

1)a) On a clairement : $L_1(\Omega_n) = [\![1, n]\!]$.

1)b) $[L_1 = m]$ signifie qu'il y a eu soit m fois pile puis face (événement A_1), soit m fois face puis pile (événement A_2). A_1 et A_2 sont disjoints.)
Or $P(A_1) = p^m q$ et $P(A_2) = q^m p$. Ainsi, $P(L_1 = m) = p^m q + q^m p$.

1)c) Si $m = n$, il n'y a eu que des piles ou que des faces. Donc : $P(L_1 = n) = p^n + q^n$.
La quantité $\sum_{m=1}^{n} P(L_1 = m)$ vaut :

$$\sum_{m=1}^{n-1} [p^m q + q^m p] + p^m + q^m = qp\frac{1-p^{n-1}}{1-p} + pq\frac{1-q^{n-1}}{1-q} + p^n + q^n.$$

N'oublions pas que $q = 1-p$ et $p = 1-q$. Et finalement $\sum_{m=1}^{n} P(L_1 = m)$ vaut :

$$p(1-p^{n-1}) + q(1-q^{n-1}) + p^n + q^n = p + q = 1.$$

2)a) On a encore clairement : $L_2(\Omega_n) = [\![0, n-1]\!]$.

2)b) $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$ signifie qu'il y a eu soit m piles suivis de k faces et enfin un pile (événement B_1), soit m faces suivis de k piles et enfin un face (événement B_2).
On a (encore une fois, B_1 et B_2 sont incompatibles :

$$B_1 = P_1 \cap ... \cap P_m \cap F_{m+1} \cap ... \cap F_{m+k} \cap P_{m+k+1}.$$

De même,

$$B_2 = F_1 \cap ... \cap F_m \cap P_{m+1} \cap ... \cap P_{m+k} \cap F_{m+k+1}.$$

Ainsi :

$$P(B_1) = p^m q^k p \text{ et } P(B_2) = q^m p^k q.$$

Donc : $P((L_1 = m) \cap (L_2 = k)) = p^{m+1} q^k + q^{m+1} p^k$.

2)c) L'événement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$ est la réuunion disjointe de C_1 et C_2 :

$$C_1 = P_1 \cap ... \cap P_m \cap F_{m+1} \cap ... \cap F_{m+k}.$$
$$C_2 = F_1 \cap ... \cap F_m \cap P_{m+1} \cap ... \cap P_{m+k}.$$

Il reste :

$$P((L_1 = m) \cap (L_2 = k)) = p^m q^k + q^m p^k.$$

2)d) N'oublions pas que $k > 0$. On a :

$$P(L_2 = k) = \sum_{m \in \mathbf{N}^\star} P(L_2 = k, L_1 = m).$$

Si $k = 1$, m varie de 1 à $n-1$.
Pour $k > 1$, m varie de 1 à $n-k$ (ainsi si $k = n-1$, m vaut seulement 1.)
Donc : $P(L_2 = k) = \sum_{m=1}^{n-k} P(L_2 = k, L_1 = m)$.

C'est-à-dire :

$$P(L_2 = k) = \sum_{m=1}^{n-k-1} \left[p^{m+1}q^k + q^{m+1}p^k\right] + p^{n-k}q^k + q^{n-k}p^k.$$

Et $P(L_2 = k) = p^2q^k\dfrac{1-p^{n-k+1}}{1-p} + q^2p^k\dfrac{1-q^{n-k-1}}{1-q} + p^{n-k}q^k + q^{n-k}p^k$.
Il reste : $P(L_2 = k) = p^2q^{k-1} + q^2p^{k-1} + p^{n-k}q^{k-1}(q-p) + q^{n-k}p^{k-1}(p-q)$.
On remarque enfin que $P(L_2 = 0) = P(L_1 = n) = p^n + q^n$.

Remarque : on peut retrouver ce résultat avec $P(L_2 = 0) = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} P(L_2 = k)$. Faites le car cela permet de vérifier les deux questions à la fois !

Exercice 02

On considère l'équation différentielle :

$$(E)\ (1+t^2)y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = 0.$$

1) Déterminons les rayons de convergence et les sommes des séries entières :

$$\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n t^n,\ \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n t^{2n} \text{ et } \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n t^{2n+1}.$$

Pour la première série, on pose $u_n(t) = (-1)^n t^n$ et :

$$\left|\frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{(-1)^n t^n}\right| = |t|.$$

Si $|t| < 1$, la série converge absolument et si $|t| > 1$, elle diverge grossièrement. Donc $R = 1$.
Pour la deuxième série, on pose $v_n(t) = (-1)^n t^{2n}$ et :

$$\left|\frac{v_{n+1}(t)}{v_n(t)}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{(-1)^n t^{2n}}\right| = |t^2|.$$

Si $|t| < 1$, la série converge absolument et si $|t| > 1$, elle diverge grossièrement. Donc $R = 1$.
Pour la troisième série, on pose $w_n(t) = (-1)^n t^{2n+1}$ et :

$$\left|\frac{w_{n+1}(t)}{w_n(t)}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+3}}{(-1)^n t^{2n+1}}\right| = |t^2|.$$

Si $|t| < 1$, la série converge absolument et si $|t| > 1$, elle diverge grossièrement. Donc $R = 1$.
Puis pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n t^n = \frac{1-(-t)^{N+1}}{1+t} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n = \frac{1}{1+t}.$$

Toujours pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n t^{2n} = \frac{1-(-t^2)^{N+1}}{1+t^2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Enfin, toujours pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n t^{2n+1} = t\frac{1-(-t^2)^{N+1}}{1+t^2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n+1} = \frac{t}{1+t^2}.$$

2) On cherche une solution de (E) dèveloppable en sèrie entière, donc de la forme $y(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, où $t \in]-R, R[$, R étant le rayon de cette série entière que l'on ne peut pas encore expliciter.

On a, pour tout $t \in]-R,R[$, $y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$ et $y''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$.
On rentre dans (E) :

$$(1+t^2)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + 4t\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0.$$

Ce qui donne :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 4n a_n t^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0.$$

Cela donne, en changeant d'indice dans la première somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 4n a_n t^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0.$$

Puis, encore, on a :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n + 4n a_n + 2a_n\right]t^n + 2a_2 + 2a_0 + (6a_3 + 4a_1 + 2a_1)t = 0.$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit que $a-2=-a_0$, que $a_3=-a_1$ et que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+n(n-1)a_n+4na_n+2a_n+0 \Rightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2} = -(n^2+3n+2)a_n = -(n+1)(n+2)a_n.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_{n+2} = -a_n$.
3) On peut en déduire toutes les solutions développables en série entière de (E).
En effet, si $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est une telle solution, si $n=2p$, $a_n = (-1)^p a_0$ et si $n=2p+1$, $a_n = (-1)^p a_1$.
Donc :

$$y(t) = a_0\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p t^{2p} + a_1\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p t^{2p+1} = a_0\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p t^{2p} + a_1 t\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p t^{2p}.$$

Comme $\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p t^{2p} = \dfrac{1}{1+t^2}$, on a : $y(t) = \dfrac{a_0+a_1 t}{1+t^2}$.
Le rayon de convergence est toujours $R=1$.
Comme l'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel de dimension 2, et comme $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}$ sont deux solutions indépendantes, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions :

$$t \mapsto \frac{\lambda+\mu t}{1+t^2}, \text{ où } (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2.$$

Exercice 03

1) Prémisse 1. Déterminons le vecteur gradient de $f : M \mapsto \|\overrightarrow{AM}\|^2$.
On a si $M(x,y)$: $f(M) = (x-x_A)^2 + (y-y_A)^2$. C'est une fonction polynomiale en x et y, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.
Et pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x-x_A) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(y-y_A)$$

Ainsi $\overrightarrow{Grad}\, f(M) = 2(x - x_A, y - y_A) = 2\overrightarrow{AM}$.

2) Prémisse 2. Déterminons le vecteur gradient de $g : M \mapsto \|\overrightarrow{AM}\|$.
On a toujours si $M(x, y) : g(M) = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}$. C'est une fonction composée d'une fonction polynomiale en x et y, et de $u \mapsto \sqrt{u}$, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
Et pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(x_A, y_A)\}$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{2(x - x_A)}{2\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}} = \frac{x - x_A}{\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}} \text{ et}$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{2(y - y_A)}{2\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}} = \frac{y - y_A}{\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}}.$$

Ainsi $\overrightarrow{Grad}\, g(M) = \dfrac{\overrightarrow{AM}}{AM}$.

3) Prémisse 3. Montrons qu'il existe un seul point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
Avec Michel de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{G0} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{G0} + \overrightarrow{0B} + \overrightarrow{G0} + \overrightarrow{0C} = \vec{0}.$$

Cela donne : $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{0B} + \overrightarrow{0C}$.
Cela donne : $\overrightarrow{OG}\left(\dfrac{1}{3}(x_A + x_B + x_C),\ \dfrac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)\right)$. Le point G a les mêmes composantes.
On dit que G est **l'isobarycentre (ou le centre de gravité)** des points A, B et C.

4)a) Prémisse 4. Soient trois vecteurs unitaires (donc de norme 1) $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ tels que $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{0}$.
Comme $\|e_1\| = 1$, si z_1 est l'affixe de $\vec{e}_1$ alors $|z_1| = 1$. Idem pour $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$. Il existe $(x_1, x_2, x_3) \in ([0, 2\pi[)^3$ tel que les affixes de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ soient respectivement e^{ix_1}, e^{ix_2} et e^{ix_3}.
De plus :

$$\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{0} \Rightarrow (1)\ e^{ix_1} + e^{ix_2} + e^{ix_3} = 0.$$

4)b) Calculons $\cos(x_2 - x_1) + \cos(x_3 - x_1)$ et $\sin(x_2 - x_1) + \sin(x_3 - x_1)$.
Pour cela, on transforme (1) en divisant par e^{ix_1} :

$$(2)\ 1 + e^{i(x_2 - x_1)} + e^{i(x_3 - x_2)} = 0.$$

On sépare partie réelle et partie imaginaire dans (2) et on obtient :

$$\cos(x_2 - x_1) + \cos(x_3 - x_1) = -1 \text{ et } \sin(x_2 - x_1) + \sin(x_3 - x_1) = 0.$$

4)c) La relation $\sin(x_2 - x_1) + \sin(x_3 - x_1) = 0 \Rightarrow \sin(x_2 - x_1) = \sin(x_1 - x_3)$.
Cela donne : $x_2 - x_1 = x_1 - x_3 + 2k\pi$ ou $x_2 - x_1 = \pi - x_1 + x_3 + 2k\pi$, où $k \in \mathbf{Z}$.
Si l'on remplace dans $\cos(x_2 - x_1) + \cos(x_3 - x_1) = -1$, l'égalité $x_2 - x_1 = x_1 - x_3 + 2k\pi$, on obtient :

$$\cos(x_1 - x_3 + 2k\pi) + \cos(x_3 - x_1) = -1 \Rightarrow 2\cos(x_3 - x_1) = -1 \Rightarrow \cos(x_3 - x_1) = \frac{-1}{2}.$$

Cela implique aussi : $\cos(x_3 - x_1) = \dfrac{-1}{2}$.
Si l'on remplace dans $\cos(x_2 - x_1) + \cos(x_3 - x_1) = -1$, l'égalité $x_2 - x_1 = \pi - x_1 + x_3 + 2k\pi$, on obtient :

$$\cos(\pi - x_1 + x_3 + 2k\pi) + \cos(x_3 - x_1) = -1 \Rightarrow 0 = -1.$$

C'est impossible. On en déduit :

$$\cos(x_2 - x_1) = -\frac{1}{2} = \cos(x_3 - x_2) = \cos(x_3 - x_1).$$

4)d) On peut dire que les trois angles de vecteurs que forment $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ ont pour mesures $\pm\dfrac{2\pi}{3}$.

4)e) Réciproquement, soient trois vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ tels que :

$$\forall (i, j) \in ([\![1, 3]\!])^2,\ \vec{e}_i.\vec{e}_j = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \text{si} & i = j \\ -\frac{1}{2} & \text{si} & i \neq j \end{array} \right. .$$

Développons $\|\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3\|^2$ en utilisant les produits scalaires des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$.
On a :

$$\|\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3\|^2=\sum_{(i,j),i=j}\vec{e}_i.\vec{e}_j+\sum_{(i,j),i\neq j}\vec{e}_i.\vec{e}_j.$$

Ainsi :

$$\|\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3\|^2=3\times 1+6\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3=\vec{0}.$$

5) Déterminons le vecteur gradient de $\psi_1 : M\mapsto\|\overrightarrow{AM}\|^2+\|\overrightarrow{BM}\|^2+\|\overrightarrow{CM}\|^2$.
On sait que pour tout M, $\overrightarrow{Grad}\,f(M)=2\overrightarrow{AM}$. On en déduit que pour tout M du plan,

$$\overrightarrow{Grad}\,\psi_1(M)=2\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}\right).$$

D'après **3)**, l'unique point critique, noté G, de ψ_1 vérifie :

$$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0};$$

C'est l'isobarycentre des points A, B et C.
Montrons que G correspond à un minimum.
En effet, $\psi_1(M)$ tend vers $+\infty$ quand $|x|+|y|$ tend vers $+\infty$.
Donc $\exists\, r>0$, $\forall M$ avec $\|\overrightarrow{OM}\|\geqslant r$, $\psi_1(M)\geqslant\psi_1(0)$.
La boule fermée de centre O et de rayon r, notée B est une partie fermée et bornéee de $\mathbf{R}^2$. Comme ψ_1 est continue sur B, elle admet un minimum sur B, par exemple le point$N$.
Si $M\in\mathbf{R}^2$, avec $\overrightarrow{OM}\|\geqslant r$, $\psi_1(M)\geqslant\psi_1(O)\geqslant\psi_1(N)$ car $O\in B$.
Donc N est un minimum de ψ_1 Ã la fois sur B et sur son complÃ©mentaire donc sur $\mathbf{R}^2$. Comme N est unique et est un minimum, c'est un point critique et c'est G car c'est le seul possible.

6) Déterminons le vecteur gradient de $\psi_2 : M\mapsto\|\overrightarrow{AM}\|.\|\overrightarrow{BM}\|.\|\overrightarrow{CM}\|$.
Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2\setminus(0,0)\}$. Et d'après **2)**,

$$\overrightarrow{Grad}\,\psi_2(M)=\frac{\overrightarrow{AM}}{AM}+\frac{\overrightarrow{BM}}{BM}+\frac{\overrightarrow{CM}}{CM}.$$

Les trois vecteurs $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{AM}$, $\dfrac{\overrightarrow{BM}}{BM}$, $\dfrac{\overrightarrow{CM}}{CM}$ sont unitaires et de somme $\vec{0}$. On peut appliquer la question **4)**.
Il existe un seul point critique, c'est le point N de Fermat défini par le fait que les angles de vecteurs $\left(\overrightarrow{NA},\,\overrightarrow{NB}\right)$, $\left(\overrightarrow{NA},\,\overrightarrow{NC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{NB},\,\overrightarrow{NC}\right)$ ont pour mesures $\pm\dfrac{2\pi}{3}$.
En faisant le même raisonnement qu'à la question précédente, on montre que N est le minimum absolu de ψ_2.

7) On n'a pas besoin de déterminer le vecteur gradient de $\psi_3 : M\mapsto\|\overrightarrow{AM}\|.\|\overrightarrow{BM}\|.\|\overrightarrow{CM}\|$.
On remarque immédiatement que ψ_3 est à valeurs positives et s'annule pour $M=A$, $M=B$ ou $M=C$.
Ces trois valeurs correspondent aux trois minimums.