Devoir libre 07

2TSI. Mathématiques

À rendre le 22 mars 2018 au plus tard

Problème

Très inspiré du Concours National Marocain, épreuve de Math II, filière TSI en 2017

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $\langle\, ,\, \rangle$ désigne son produit scalaire.

Partie A

Endomorphismes symétriques dans E

Soit u une application de E dans E. On dit que u est un **endomorphisme symétrique** de E si :

$$\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2,\ \langle u(\vec{x}),\, \vec{y}\rangle = \langle \vec{x},\, u(\vec{y})\rangle.$$

On note dans la suite $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

1. On veut montrer que u est nécessairement un endomorphisme de E.
   (a) Démontrer que si $u \in S(E)$, alors pour tout $(\vec{x}_1,\vec{x}_2) \in E^2$ et tout $\alpha \in \mathbf{R}$,
   $$\forall \vec{y} \in E,\ \langle u(\vec{x}_1 + \alpha\vec{x}_2), \vec{y}\rangle = \langle u(\vec{x}_1) + \alpha u(\vec{x}_2), \vec{y}\rangle.$$
   (b) En déduire que $u \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que $S(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
3. Un exemple : montrer que $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (x-z, y-z, -x-y+z)$ est un endomorphisme symétrique de $\mathbf{R}^3$.
4. Dans cette question, on rapporte E à une de ses bases orthonormales $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ et u est un endomorphisme de E de matrice M dans $\mathcal{B}$.
   Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de E et on considère les matrices colonnes X et Y qui représentent respectivement $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans $\mathcal{B}$.
   (a) Vérifier que $\langle \vec{x},\, \vec{y}\rangle = X^TY$ et que $\langle u(\vec{x}),\, \vec{y}\rangle = X^TM^TY$.
   (b) On suppose que M est symétrique, c'est-à-dire que $M^T = M$. Montrer que u est un endomorphisme symétrique.
   (c) Réciproquement, on suppose que u est un endomorphisme symétrique.
   Montrer que pour tout $(X,Y) \in \left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^2$, $X^TM^TY = X^TMY$.
   En déduire que M est symétrique.

Partie B

Quelques propriétés d'une isométrie vectorielle de E

Soit f une application de E dans E. On rappelle que f est un **endomorphisme orthogonal** ou une **isométrie vectorielle** de E si :

$$\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2,\ \langle f(\vec{x}),\, f(\vec{y})\rangle = \langle \vec{x},\, \vec{y}\rangle.$$

On note dans la suite $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

T.S.V.P →

1. Soit f une isométrie vectorielle de E.
   (a) Montrer que f est bijectif et que sa réciproque $f^{-1} \in O(E)$.
   (b) Montrer que le spectre de f est inclus dans $\{-1, 1\}$.
2. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que $f \in O(E)$ si et seulement si f transforme toute base orthonormée de E en une base orthonormée de E.
3. Montrer que si $f \in O(E)$ alors $f \in \mathcal{L}(E)$.
4. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est orthogonale si et seulement si $M^T M = I_n$. Montrer que $f \in O(E)$ si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est orthogonale.
5. On suppose que $f \in O(E)$.
   (a) Montrer que $f + f^{-1} \in S(E)$.
   (b) Soit $\vec{x}$ un vecteur propre de $f + f^{-1}$.
      i. Montrer que $\mathsf{Vect}\,(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est stable par f.
      ii. En déduire que f admet au moins un sous espace vectoriel stable de dimension 1 ou 2.
   (c) Soit F un sous espace vectoriel stable par f.
      i. Montrer que $f(F) = F$.
      ii. Montrer que $F^{\perp}$ est stable par f.

Partie C

Distance à un sous espace vectoriel

Soit m un entier tel que $m \geqslant 2$. Ici $E = \mathbf{R}_{m-1}[X]$ et pour tout $(P, Q) \in E^2$,

$$\langle P,\, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\, dt.$$

On pose $F = \{P \in E, P(0) = 0\}$ et on note $(P_0, ..., P_{m-1})$ l'orthonormalisée de Schmidt de $(1, X, ..., X^{m-1})$.

1. Vérifier que $\langle\, ,\, \rangle$ est un produit scalaire sur E.
   Dans toute la suite, E est muni de ce produit scalaire, ce qui lui confère une structure d'espace euclidien.
2. Montrer que F est un hyperplan de E, c'est-à-dire que F est un sous espace vectoriel de E et que $\mathsf{dim}\, F = \mathsf{dim}\, E - 1$.
3. Justifier l'existence du polynôme S, vecteur directeur de la droite vectorielle orthogonale à F.
4. On détermine ici une expression de S.
   (a) Vérifier que pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant m-1$, les polynômes P_k et P_k' sont orthogonaux.
   (b) En déduire que pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant m-1$, $(P_k(0))^2 = \|P_k\|^2 = 1$.
   (c) Vérifier que pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant m-1$, $\langle P_k,\, S\rangle = P_k(0)\langle 1,\, S\rangle$.
   (d) En déduire que $S = \alpha \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} P_k(0)P_k$ avec $\alpha = \langle 1,\, S\rangle \neq 0$.
5. On considère ϕ la projection orthogonale sur F et soit ψ l'endomorphisme de E tel que $\psi = 2\,\phi - Id_E$.
   (a) Montrer que ϕ est un enomorphisme symétrique de E.
   (b) Montrer que ψ est une isométrie vectorielle de E.
   (c) Montrer que pour tout $P \in E$, $\phi(P) = P - \dfrac{\langle P,\, S\rangle}{\|S\|^2}\, S$.
6. On considère le polynôme $h = 1$. Montrer que $d(h, F) = \dfrac{1}{\sqrt{m}}$, où d est la distance associée à $\|\,.\,\|$.
7. En déduire $d(h,\, F^{\perp})$.