Concours Blanc 2018. Mathématiques. 2TSI

Durée : 4 heures. Aucun document ou calculatrice n'est autorisé.

Les deux problèmes sont indépendants.

Problème 01

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, on considère ici des variables aléatoires réelles discrètes finies ou infinies, c'est-à-dire que si X est une telle variable aléatoire réelle, $X(\Omega)$ est un ensemble finie ou un ensemble dénombrable.
On appelle ***fonction génératrice des moments de*** X, lorsqu'elle existe, la fonction M_X de variable $t \mapsto E\left(e^{tX}\right)$, où $E\left(e^{tX}\right)$ désigne l'espérance de la variable aléatoire e^{tX}.

Partie A. Cas particulier de variables aléatoires discrètes finies

Ici X désigne une variable aléatoire réelle discrète prenant un nombre fini de valeurs $x_1, ..., x_r$ avec les probabilités respectives $p_1, ..., p_r$, où $r \in \mathbb{N}^\star$.
On considère aussi la fonction ϕ_X définie sur $\mathbb{R}^\star$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^\star,\ \phi_X(t) = \frac{1}{t}\ln(M_X(t)).$$

1. Dans cette question **seulement**, X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.
   Que valent $E(X)$ et $V(X)$? Déterminer M_X et ϕ_X.
2. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in [\![1, r]\!]$: $e^{tx_k} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tx_k)^n}{n!}$.
   Montrer alors que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $M_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E(X^n)}{n!} t^n$.
   En déduire que M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que :
   $$\forall k \in \mathbb{N},\ M_X^{(k)}(0) = E(X^k).$$
3. Donner le développement limité à l'ordre 1 puis à l'ordre 2 au voisinage de 0 de :
   $$u \mapsto \ln(1 + u).$$
4. Justifier que $M_X(t) = M_X(0) + M_X'(0)t + o(t)$, quand t tend vers 0.
   Montrer que ϕ_X est bien définie sur $\mathbb{R}^\star$ et prolongeable par continuité en 0.

On pose dans la suite $\phi_X(0) = E(X)$ et on note encore ϕ_X la fonction prolongée.

5. Justifier que $M_X(t) = M_X(0) + M_X'(0)t + \dfrac{M''(0)}{2!}t^2 + o(t^2)$, quand t tend vers 0.
   Démontrer que ϕ_X est dérivable en 0 et calculer $\phi_X'(0)$ en fonction de $V(X)$.
6. (a) Montrer que : $\forall u \leqslant 0,\ e^u \leqslant 1 + u + \frac{1}{2}u^2$ et $\forall u \in]-1, +\infty[,\ \ln(1 + u) \leqslant u$.
   (b) Montrer que si X ne prend que des valeurs négatives ou nulles, alors, pour tout t supérieur ou égal à 0, on a l'inégalité : $\phi_X(t) \leqslant E(X) + \frac{t}{2}E(X^2)$.
7. (a) Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on note f_i la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $t \mapsto e^{tx_i}$.
   Montrer que la famille $(f_1, ..., f_r)$ est libre.

(b) En déduire que deux $v.a.r.d$ finies X et Y ont la même loi si, et seulement si, les fonctions ϕ_X et ϕ_Y sont égales.

8. Montrer que si X et Y sont des $v.a.r.d$ finies indépendantes alors $\phi_{X+Y} = \phi_X + \phi_Y$.
(On rappelle que si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires réelles indépendantes d'espérances finies, alors $E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2)$.)
9. On suppose dans cette question **seulement** que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(s,p)$, où $s \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in [0,1]$. Que valent $E(X)$ et $V(X)$? Déterminer ϕ_X,
10. On considère maintenant une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires réelles discrètes et finies mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suivent la même loi que X.
On note m l'espérance de X et σ son écart-type que l'on suppose strictement positif.
On pose : $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $S_n^\star = \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$.
On pourra utiliser les résultats suivants, si $Y_1, ..., Y_n$ sont n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes alors $V\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} V(Y_i)$ et $E\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} Y_i\right) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} E(Y_i)$.

    (a) Montrer : $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, $\forall t \in \mathbf{R}^\star$, $\phi_{S_n^\star}(t) = \dfrac{-m\sqrt{n}}{\sigma} + \dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}\phi_X\left(\dfrac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$.

    (b) Justifier que $\phi_X(u) = \phi_X(0) + \phi'_X(0)u + o(u)$, où u tend vers 0.
    Montrer enfin que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \phi_{S_n^\star}(t) = \frac{t}{2}$.

Partie B. Cas de variables aléatoires discrètes infinies.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète infinie, notons I_X l'ensemble des réels t pour lesquels M_X existe.

1. On veut montrer que I_X est un intervalle contenant 0.
    (a) Montrer que, pour tous réels a, b, c tels que $a < b < c$ et tout réel x, $e^{bx} \leqslant e^{ax} + e^{cx}$.
    (b) Justifier le fait que $0 \in I_X$.
    (c) Soient $a \in I_X$ et $c \in I_X$ avec $a < c$. Montrer que si $b \in]a, c[$ alors $b \in I_X$. Conclure.
2. Dans cette question **seulement**, X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Rappeler $X(\Omega)$. Montrer : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} P(X = n)e^{tn}$ est une série absolument convergente.
En déduire que la fonction M_X existe pour tout t, puis l'expliciter.

Problème 02

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Partie A. Opérateur de translation

L'opérateur de translation est l'application r de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ telle que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\, r(P(X)) = P(X+1).$$

1. Montrer que r est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On suppose $n = 2$ dans cette question **seulement**. Écrire la matrice de r dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer le noyau et l'image de r.
3. Exprimer, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul, le degré et le coefficient dominant de $r(P)$ à l'aide du degré et du coefficient dominant de P.
4. Soient $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $k \in \mathbb{N}$. Donner l'expression de $r^k(P)$.
5. Donner la matrice $M = (M_{i,j})$ de r dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On exprimera les coefficients $M_{i,j}$ de cette matrice en fonction de i et de j.
6. Quel est le polynôme caractéristique de r ? Ses valeurs propres ? L'endomorphisme r est-il diagonalisable ?
7. L'endomorphisme r est-il un isomorphisme ? Si oui, préciser r^{-1}. L'expression de r^k trouvée pour $k \in \mathbb{N}$ est-elle encore valable pour tout $k \in \mathbb{Z}$?
8. Exprimer les coefficients de la matrice M^{-1}.
9. On considère une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on définit :

$$(1) \quad v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j.$$

   (a) Déterminer une matrice $Q \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que : $\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$.

   (b) En déduire la formule d'inversion :

$$(2) \quad \forall k \in \mathbb{N},\, u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j.$$

   (c) On considère ici un réel λ et la suite u définie par $u_k = \lambda^k$ pour tout $k \in \mathbb{K}$. Quelle est la suite v définie alors par la formule (1) ? Vérifier alors la formule (2).

Partie B. Opérateur de différence

L'opérateur de différence est l'application δ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ telle que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\, \delta(P(X)) = P(X+1) - P(X).$$

1. Montrer rapidement que δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On suppose $n = 2$ dans cette question **seulement**. Écrire la matrice de δ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer le noyau et l'image de δ.
3. Exprimer, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul, le degré et le coefficient dominant de $\delta(P)$ à l'aide du degré et du coefficient dominant de P.

4. En déduire le noyau et l'image de l'endomorphisme δ.
5. (a) Vérifier que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, et tout polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$ vérifiant $\deg P \geqslant j$, on a :
$$\deg(\delta^j(P)) = (\deg P) - j.$$
Que se passe t-il si $\deg P \leqslant j - 1$?
   (b) Déterminer, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker}(\delta^j)$ et $\operatorname{Im}(\delta^j)$.
6. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Exprimer $\delta^k(P)$ en fonction des $r^j(P)$ pour $j \in [\![0, k]\!]$.
7. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que :
$$(3) \quad \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0.$$
8. Dans cette question, on se propose de montrer par l'absurde qu'il n'existe pas d'endomorphisme $\phi \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\phi^2 = \delta$.
On suppose donc qu'il existe un tel endomorphisme ϕ.
   (a) Montrer que ϕ et δ^2 commutent.
   (b) En déduire que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par ϕ, c'est-à-dire que $\phi(\mathbb{R}_1[X]) \subset \mathbb{R}_1[X]$.
Indication : on pourra remarquer que $\operatorname{Ker}(\delta^2) = \mathbf{R}_1[X]$.
   (c) On veut montrer ici qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Pour cela, on va raisonner par l'absurde et supposons l'existence d'une telle matrice et appelons f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
      i. Montrer qu'alors f ne peut être ni injectif, ni nul et qu'il est de rang 1.
      ii. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
      iii. Que vaut f^4 ?
En considérant une base de $\operatorname{Im} f$ et son image par f, arriver à une absurdité.
   (d) On considère maintenant l'endomorphisme ψ induit par ϕ sur $\mathbb{R}_1[X]$. En notant M la matrice de ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$, calculer M^2. Conclure.
9. Dans cette question, on cherche tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par δ.
   (a) Soit P un polynôme non nul de degré $d \leqslant n$. Montrer que la famille
$$\big(P,\, \delta(P),\, ...,\, \delta^d(P)\big)$$
est libre. Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille ?
   (b) En déduire que, si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et différent de $\left\{\vec{0}_{\mathbb{R}_n[X]}\right\}$, il existe un entier $d \in [\![1, n]\!]$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$.