Probleme 01

Partie A

1) Ici X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.
Alors $P(X=1)=p$ et $P(X=0)=1-p$. Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tX} P(X=x) = e^{t\times 0}P(X=0) + e^{t\times 1}P(X=1),$$

c'est-à-dire : $M_X(t) = 1-p+pe^t$.
Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}^\star$, $\phi_X(t) = \dfrac{1}{t}\ln\left(1-p+pe^t\right)$.

2) D'après le théorème de transfert pour les $v.a.r$ finies,

$$\forall t \in \mathbb{R}, M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{k=1}^{r} e^{tx_k} P(X=x_k).$$

Puis, on a le DSE de $e^u = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$, valable pour tout u réel.

Donc, pour tout $k \in [\![1,r]\!]$: $e^{tx_k} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tx_k)^n}{n!}$.

Il reste alors à écrire :

$$M_X(t) = \sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(tx_k)^n}{n!}\right)P(X=x_k) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{r}\frac{(tx_k)^n}{n!}P(X=x_k)\right),$$

ce qui donne :

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=1}^{r} x_k^n P(X=x_k)\right)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{E(X^n)}{n!}t^n.$$

Ainsi M_X est développable en série entière sur $\mathbf{R}$, ce qui implique que M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Puis, d'après le cours sur les séries de Taylor, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{M_X^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{E(X^k)}{k!} \Rightarrow M_X^{(k)}(0) = E(X^k)$.

Version sans série entière. On peut aussi arriver au même résultat avec la formule de Taylor-Young. En effet, la relation $M_X(t) = E(e^{tX}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} e^{tx_k}P(X=x_k)$ indique que M_X est une combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et donc déjà, la fonction M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, (en appliquant la formule de Taylor-Young à M_X, de classe $\mathcal{C}^n$) pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{G_X^k(0)}{k!} + o(t^n).$$

Par ailleurs : $M_X(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} e^{tx_k}P(X=x_k) = \sum_{k=1}^{r} P(X=x_k)\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{(tx_k)^j}{j!} + o(t^n)\right)$, quand t tend vers 0, en appliquant un développement limité de $t \mapsto e^{tx_k}$. Puis :

$$M_X(t) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{r} P(X=x_k)\frac{(tx_k)^j}{j!} + o(t^n),$$

en permutant les deux sommes. Cela donne : $M_X(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}\frac{t^j}{j!}\sum_{k=1}^{r} P(X=x_k)x_k^j + o(t^n)$.

Il reste à remarquer : $E(X^j) = \sum_{k=1}^{r} P(X = x_k)x_k^j$, par unicité d'un développement limité au $V(0)$.)

Et :

$$M_X(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{E(X^j)}{j!} t^j + o(t^n).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_X^{(n)}(0) = E(X^n)$.

3) On a, à l'ordre 2 : $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$, quand u tend vers 0.

4) Comme M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au $V(0)$, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ au $V(0)$ et pour tout $t \neq 0$, (toujours avec la formule de Taylor-Young),

$$M_X(t) = M_X(0) + M_X'(0)t + o(t).$$

Comme $\sum_{k=1}^{r} p_k = 1$, $p_1, ..., p_r$ ne sont pas tous nuls et il existe $k_0 \in [\![1, r]\!]$ tel que $p_{k_0} > 0$.

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M_X(t) = \sum_{k=1}^{r} p_k e^{tx_k} \geqslant p_{k_0} e^{tx_0} > 0$.

Ainsi, la fonction $t \mapsto \ln(M_X(t))$ est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction ϕ_X est bien définie sur $\mathbb{R}^\star$.
Reprenons pour tout $t \neq 0$,

$$M_X(t) = M_X(0) + M_X'(0)t + o(t).$$

Alors : $\phi_X(t) = \dfrac{1}{t}\left(M_X(0) + M_X'(0)t + o(t)\right)$.

Cela donne : $\phi_X(t) = \dfrac{1}{t}\left(1 + E(X)t + o(t)\right) = \dfrac{1}{t}\left(E(X)t + o(t)\right)$.
Puis : $\phi_X(t) = E(X) + o(1)$ tend vers $E(X)$ quand $t \to 0$.
Bilan : ϕ_X est prolongeable par continuité en 0 et $\phi_X(0) = E(X)$.

5) La fonction M_X est de classe $\mathcal{C}^2$ au $V(0)$ et on appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 2,

$$M_X(t) = M_X(0) + M_X'(0)t + \frac{M''(0)}{2!}t^2 + o(t^2),$$

quand t tend vers 0.

Puis, pour tout $t \neq 0$, on écrit : $\dfrac{\phi_X(t) - \phi_X(0)}{t-0} = \dfrac{1}{t}\left[\dfrac{1}{t}\ln(M_X(t)) - E(X)\right]$.

(Là, on applique la formule de Taylor.)

Donc : $M_X(t) = 1 + E(X)t + \dfrac{E(X^2)}{2}t^2 + o(t^2)$, par la question précédente.

On en déduit la quantité $\ln(M_X(t))$.

$$\ln(M_X(t)) = \left(E(X)t + \frac{E(X^2)}{2}t^2\right) - \frac{1}{2}\left(E(X)t + \frac{E(X^2)}{2}t^2\right)^2 + o(t^2),$$

en utilisant $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$, quand u tend vers 0.

La quantité $\dfrac{\phi_X(t) - \phi_X(0)}{t-0}$ devient :

$$\frac{1}{t}\left[\frac{1}{t}\left(\left(E(X)t + \frac{E(X^2)}{2}t^2\right) - \frac{1}{2}\left(E(X)t + \frac{E(X^2)}{2}t^2\right)^2 + o(t^2)\right) - E(X)\right].$$

Il reste à développer et $\dfrac{\phi_X(t) - \phi_X(0)}{t-0}$ devient d'abord :

$$\frac{1}{t}\left[\frac{1}{t}\left(E(X)t + \frac{E(X^2)}{2}t^2 - \frac{1}{2}E(X)^2t^2 + o(t^2)\right) - E(X)\right].$$

Puis ensuite, $\dfrac{\phi_X(t)-\phi_X(0)}{t-0}$ devient :

$$\frac{1}{2}\left(E(X^2)-E(X)^2\right)+o(1)=\frac{1}{2}V(X)+o(1).$$

Ainsi, ϕ_X est dérivable en 0 et $\phi'_X(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\phi_X(t)-\phi_X(0)}{t-0}=\dfrac{1}{2}V(X)$.

6)a) Pour montrer que pour tout $u\leqslant 0$, $e^u\leqslant 1+u+\frac{1}{2}u^2$, on peut étudier la fonction $u\mapsto e^u-1-u-\frac{1}{2}u^2$ et remarquer qu'elle est négative sur $\mathbb{R}^-$ ou on peut aussi utiliser la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\exp(u)=\frac{\exp^{(0)}(0)}{0!}+\frac{\exp^{(1)}(0)}{1!}u+\frac{\exp^{(2)}(0)}{2!}u^2+\int_0^u\frac{(t-u)^2}{2!}\exp^{(3)}(t)\,dt.$$

Donc : $e^u-1-u-\dfrac{1}{2}u^2=-\displaystyle\int_u^0\frac{(t-u)^2}{2!}e^t\,dt\leqslant 0$. On a bien : $\forall u\leqslant 0$, $e^u\leqslant 1+u+\dfrac{1}{2}u^2$.
Pour l'autre inégalité, le plus simple est d'étudier $f:u\mapsto \ln(1+u)-u$.
Cette fonction est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour tout $u\in]-1,+\infty[$, $f'(u)=-\dfrac{u}{1+u}$.
Donc f est croissante sur $]-1,0[$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
Par suite, pour tout $u\in]-1,+\infty[$, $f(u)\leqslant f(0)$, ce qui donne le résultat : $\forall u\in\mathbb{R}$, $\ln(1+u)\leqslant u$.

6)b) Supposons que X ne prend que des valeurs négatives ou nulles, alors, pour tout $k\in[\![1,r]\!]$, $x_k\leqslant 0$ et pour tout $t\geqslant 0$, (car $x_kt\leqslant 0$ et $p_k\geqslant 0$), en utilisant la première inégalité de la question **6)a)**, on a la nouvelle inégalité :

$$M_X(t)=\sum_{k=1}^r p_ke^{tx_k}\leqslant\sum_{k=1}^r p_k\left(1+x_kt+\frac{1}{2}(x_kt)^2\right).$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^r p_k=1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^r p_kx_k=E(X)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^r p_kx_k^2=E(X^2)$.
Il reste : $M_X(t)\leqslant 1+tE(X)+\dfrac{t^2}{2}E(X^2)$.
Par croissance de la fonction ln, on a, pour tout $t\geqslant 0$,

$$\ln(M_X(t))\leqslant\ln\left(1+tE(X)+\frac{t^2}{2}E(X^2)\right).$$

On utilise maintenant la deuxième inégalité de la question **6)a)**. On a :

$$(1)\quad \ln(M_X(t))\leqslant tE(X)+\frac{t^2}{2}E(X^2)\,;$$

Si $t=0$, on a : $\phi_X(0)=E(X)$ et on a : $\phi_X(t)\leqslant E(X)+\dfrac{t}{2}E(X^2)$.

Si $t>0$, on divise (1) par t et on a : $\phi_X(t)\leqslant E(X)+\dfrac{t}{2}E(X^2)$.

Donc : $\forall t\geqslant 0$, $\phi_X(t)\leqslant E(X)+\dfrac{t}{2}E(X^2)$.

7)a) On suppose $x_1<x_2<...<x_r$, quitte à réindexer.
Supposons que $(f_1,...,f_r)$ soit liée.
Il existe donc $a_1,...,a_r$ r réels non tous nuls tels que : (vous l'avez compris, on fait un raisonnement par l'absurde)

$$(1)\ \ a_1f_1+...+a_rf_r=0.$$

Prenons $k_0=\min\{k\in[\![1,r]\!],\ a_k\neq 0\}$. On a : $a_1=...=a_{k_0-1}=0$ et $a_{k_0}\neq 0$.
La relation (1) devient : $a_{k_0}f_{k_0}+...+a_rf_r=0$. Donc :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ a_{k_0}e^{x_{k_0}t}+...+a_re^{x_rt}=0.$$

Cela donne : $\forall t\in\mathbb{R}$, $a_{k_0}=-\displaystyle\sum_{k=k_0+1}^r a_ke^{(x_k-x_{k_0})t}$.
Comme $x_k-x_{k_0}>0$, quand on fait tendre t vers $-\infty$, il reste $a_{k_0}=0$.
Ce qui est absurde. La famille $(f_1,...,f_n)$ est libre.

7)b) Posons $F=X(\Omega)\cup Y(\Omega)$. Cet ensemble est toujours fini et on remarque que si $x\in X(\Omega)\setminus Y(\Omega)$, $P(Y=x)=0$ et si $x\in Y(\Omega)\setminus X(\Omega)$, $P(X=x)=0$.

Partons maintenant de :

$$[\forall t \in \mathbb{R}^\star,\, \phi_X = \phi_Y] \Leftrightarrow \left[\forall t \in \mathbb{R}^\star,\, \frac{1}{t}\ln(M_X(t)) = \frac{1}{t}\ln(G_Y(t))\right].$$

On multiplie par t et on peut étendre à $t = 0$. Donc :

$$[\forall t \in \mathbb{R},\, M_X(t) = M_Y(t)] \Leftrightarrow \left[\forall t \in \mathbb{R},\, \sum_{x\in F} P(X = x)e^{tx} = \sum_{x\in F} P(Y = x)e^{tx}\right].$$

C'est-à-dire : (1) $\forall t \in \mathbb{R},\, \displaystyle\sum_{x\in F} \left(P(X = x) - P(Y = x)\right) e^{tx}$.
Or $t \mapsto e^{tx}$ est une fonction du type f_x. Comme le nombre de x est fini, la famille $(f_x)_{x\in E}$ est libre et (1) équivaut à écrire que pour tout $x \in F$,

$$P(X = x) - P(Y = x) = 0.$$

Cela signifie que $X(\Omega) = Y(\Omega)$ par conséquent car pour tout $x \in F$, $P(X = x) = 0$ équivaut à $P(Y = x) = 0$. On a bien le résultat : X et Y ont la même loi si et seulement si $\phi_X = \phi_Y$.
8) On suppose que X et Y sont des $v.a.r.d$ finies indépendantes. Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, e^{tX} et e^{tY} sont aussi indépendantes. Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$M_{X+Y}(t) = E\left(e^{t(X+Y)}\right) = E\left(e^{tX}e^{tY}\right) = E\left(e^{tX}\right)E\left(e^{tY}\right).$$

Ainsi, $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$.
On passe au logarithme, on divise par t et on a le résultat : $\phi_{X+Y} = \phi_X + \phi_Y$.
9) On peut généraliser le résultat de la question **8)**.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2, si $X_1, ..., X_n$ sont n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, montrons que $\phi_{X_1+...+X_n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \phi_{X_i}$.
Le résultat est vrai pour $n = 2$, d'après la question **8)**.
Supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre n. Montrons le résultat à l'ordre $n+1$. Soient $X_1, ..., X_{n+1}$ $n+1$ variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes et posons $Y = X_1 + ... + X_n$. Les variables aléatoires réelles X_{n+1} et Y sont indépendantes, donc en utilisant **8)**, on écrit :

$$\phi_{X_1+...+X_{n+1}} = \phi_{Y+X_{n+1}} = \phi_Y + \phi_{X_{n+1}}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, $\phi_Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \phi_{X_i}$, on a :

$$\phi_{X_1+...+X_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n} \phi_{X_i} + \phi_{X_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n+1} \phi_{X_i}.$$

C'est bien le résultat à l'ordre $n+1$.
Lorsque X suit la loi binomiale de paramètres s et p, s est un entier naturel non nul et $0 \leqslant p \leqslant 1$, X s'écrit comme somme $Z_1 + ... + Z_s$ de s variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p.
Et : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{s} \phi_{Z_k}(t)$, $Z_1, ..., Z_s$ étant mutuellement indépendantes. Comme pour tout $t \in \mathbb{R}^\star$, pour tout $s \in [\![1, s]\!]$, $\phi_{Z_k}(t) = \dfrac{1}{t}\ln(1 - p + pe^t)$, on a pour $t \in \mathbb{R}^\star$, $\phi_X(t) = \dfrac{s}{t}\ln(1 - p + pe^t)$.
Puis si $t = 0$, $\phi_X(0) = E(X) = sp$.
On peut résumer : $\phi_X(t) = \begin{cases} \dfrac{s}{t}\ln(1 - p + pe^t) & \text{pour } t \neq 0 \\ \\ sp & \text{pour } t = 0 \end{cases}$
10)a) $E(S_n) = E(X_1) + ... + E(X_n) = nm$ et, comme $X_1, ..., X_n$ sont mutuellement indépendantes, $V(S_n) = V(X_1) + ... + V(X_n) = n\sigma^2$.

Pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$M_{S_n^\star}(t) = E\left(e^{tS_n^\star}\right) = E\left(e^{t\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}}\right) = E\left(e^{t\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}}}\right).$$

Et : $M_{S_n^\star}(t) = e^{-t\frac{m\sqrt{n}}{\sigma}} E\left(e^{t\frac{S_n}{\sqrt{n}\sigma}}\right) = e^{-t\frac{m\sqrt{n}}{\sigma}} E\left(e^{\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}X_1} \times ... \times e^{\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}X_n}\right)$
$= e^{-t\frac{m\sqrt{n}}{\sigma}} E\left(e^{\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}X_1}\right) \times ... \times E\left(e^{\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}X_n}\right)$
$= e^{-t\frac{m\sqrt{n}}{\sigma}} E\left(e^{\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}X}\right) \times ... \times E\left(e^{\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}X}\right) = e^{-t\frac{m\sqrt{n}}{\sigma}} \left(M_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right)^n$. (D'après la linéarité de l'espérance puis le fait que X_1, ..., X_n sont indépendantes.)
Donc, pour tout $t \neq 0$, $\phi_{S_n^\star}(t) = \frac{1}{t}\ln\left(e^{-t\frac{m\sqrt{n}}{\sigma}}\left(M_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right)^n\right)$.
Cela donne :

$$\forall t \neq 0,\ \phi_{S_n^\star}(t) = -\frac{m\sqrt{n}}{\sigma} + \frac{n}{t}\ln\left(M_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right).$$

Ou encore :

$$\forall t \neq 0,\ \phi_{S_n^\star}(t) = -\frac{m\sqrt{n}}{\sigma} + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\phi_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

10)b) D'après la question **5)**, ϕ_X est dérivable en 0 et admet donc un $DL_1(0)$. On part de :

$$\phi_X(u) = \phi_X(0) + \phi'_X(0)u + o(u) = m + \frac{\sigma^2}{2}u + o(u),$$

car $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$.
Comme $t/(\sigma\sqrt{n})$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, alors :

$$\phi_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = m + \frac{t\sigma}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

Il reste : $\phi_{S_n^\star}(t) = -\frac{m\sqrt{n}}{\sigma} + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(m + \frac{t\sigma}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)$.
Soit : $\phi_{S_n^\star}(t) = \frac{t}{2} + o\left(\frac{t}{2}\right) \sim \frac{t}{2}$, quand $t \to 0$. On peut conclure.

Partie B

1)a) Pour tous réels a, b, c tels que $a < b < c$ et tout réel x. Si $x \geqslant 0$, alors $bx \leqslant cx$ et comme exp est croissante, $e^{bx} \leqslant e^{cx}$. Et donc : $e^{bx} \leqslant e^{ax} + e^{cx}$.
Si $x \leqslant 0$, alors $bx \leqslant ax$ et comme exp est croissante, alors $e^{bx} \leqslant e^{ax}$. Donc : $e^{bx} \leqslant e^{ax} + e^{cx}$.
1)b) On a $e^{0X} = 1$ est une variable aléatoire constante donc elle admet une espérance et donc $M_X : t \mapsto E(e^{tX})$ est définie en 0 et par suite $0 \in I_X$.
1)c) Soient $a \in I_X$ et $c \in I_X$ avec $a < c$. Montrons que si $b \in]a, c[$ alors $b \in I_X$. Puisque $a \in I_X$ et $c \in I_X$, $M_X(a)$ et $M_X(c)$ existent, ce qui signifie que les v.a.r e^{aX} et e^{cX} admettent des espérances et $e^{aX} + e^{cX}$ aussi. Et comme $e^{bX} \leqslant e^{aX} + e^{cX}$, e^{bX} admet une espérance. Et $M_X(b)$ existe et donc $b \in I_X$. Ainsi $]a, c[\subset I_X$ et donc $[a, c] \subset I_X$. Donc I_X est un intervalle de $\mathbf{R}$.
2) Dans cette question **seulement**, X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Il est clair que $X(\Omega) = \mathbf{N}$.

Montrons : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{n \geqslant 0} P(X = n)e^{tn}$ est une série absolument convergente.

Posons $u_n = P(X = n)e^{tn} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}e^{tn} = e^{-\lambda}\frac{(\lambda e^t)^n}{n!}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{-\lambda}\frac{(\lambda e^t)^{n+1}}{(n+1)!}}{e^{-\lambda}\frac{(\lambda e^t)^n}{n!}} = \frac{\lambda e^t}{n+1},$$

quantité qui tend vers 0 (pour t fixé) quand n tend vers $+\infty$.

Donc $M_X(t) = E(e^{tX})$ existe et :

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda e^t)^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^t)^n}{n!} = e^{-\lambda} \exp(\lambda e^t) = \exp(-\lambda + \lambda e^t).$$

La suite du problème 01 n'a pas été posé au concours blanc 2018.

3)a) Montrons que pour tout $t \in]-\alpha, \alpha[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{tx_n} \leqslant e^{\alpha|x_n|}$.

Comme $t \in]-\alpha, \alpha[$, on a : $tx_n \leqslant |tx_n| \leqslant \alpha|x_n|$. Puis, on utilise la croissance de exp et : $e^{tx_n} \leqslant e^{\alpha|x_n|}$.

Puis, pour tout $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall t \in]-\alpha, \alpha[$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n^{(k)}(t)| = |P(X = x_n) x_n^k e^{tx_n}| \leqslant P(X = x_n)(|x_n|)^k e^{\alpha|x_n|}.$$

3)b) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\, x \mapsto x^k e^{(\alpha-\rho)x}$.

Comme $\alpha - \rho < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Donc f est bornée au voisinage de $+\infty$, par exemple $[\beta, +\infty[$ et comme f est continue sur tout segment, par exemple $[0, \beta]$, f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

3)c) Donc, il existe $M_k > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $f(x) = x^k e^{(\alpha-\rho)x} \leqslant M_k$.

Donc, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $x^k e^{\alpha x} \leqslant M_k e^{\rho x}$. On applique avec $x = |x_n|$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $M_k > 0$ tel que pour tout $t \in]-\alpha, \alpha[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n^{(k)}(t)| \leqslant P(X = x_n)|x_n|^k e^{\alpha|x_n|} \leqslant P(X = x_n) M_k e^{\rho|x_n|}.$$

3)d) Montrons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^{(k)}$ converge normalement sur $]-\alpha, \alpha[$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Comme $-\rho$ et ρ sont dans $]-a, a[$, $\pm\rho \in I_X$ et $M_X(\rho)$ et $M_X(-\rho)$ existent.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $e^{\rho|x_n|} \leqslant e^{\rho x_n} + e^{-\rho x_n}$. On a alors, en utilisant **3)c)** :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists\, M_k > 0,\ \forall t \in]-\alpha, \alpha[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n^{(k)}(t)| \leqslant M_k P(X = x_n)\left(e^{\rho x_n} + e^{-\rho x_n}\right).$$

Or $M_k P(X = x_n) e^{\rho x_n}$ est le terme général d'une série convergente (car de somme égale à $M_X(\rho)$) et, de même, $M_k P(X = x_n) e^{-\rho x_n}$ est le terme général d'une série convergente (car de somme égale à $M_X(-\rho)$). Donc la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} M_k P(X = x_n)\left[e^{\rho x_n} + e^{-\rho x_n}\right]$ est convergente et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^{(k)}$ converge normalement sur $]-\alpha, \alpha[$.

Il reste à remarquer que :

- $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement sur $]-\alpha, \alpha[$.
- u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ sur $]-\alpha, \alpha[$.
- La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^{(k)}$ converge uniformément sur $]-\alpha, \alpha[$, pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$.
- Conclusion : M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\alpha, \alpha[$ et comme $\alpha \in [0, a[$, M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-a, a[$.

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$M_X^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n) x_n^k = E(X^k).$$

<u>Problème 02</u>

Partie A

1) Montrons que r est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

On a, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, et pour tout $a \in \mathbf{R}$,

$$r(P + aQ)(X) = (P + aQ)(X + 1) = P(X + 1) + aQ(X + 1) = r(P)(X) + ar(Q)(X).$$

Puis, comme $(X+1)^k$ est un polynôme de degré k pour tout k, si $P(X)$ est de degré au plus n, $P(X+1)$ est de degré au plus n.

2) On suppose $n=2$ dans cette question **seulement**. Écrivons la matrice R de r dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$R(1)=1,\ R(X)=1+X,\ R(X^2)=1+2X+X^2.$$

Ainsi $R=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On remarque immédiatement que R est inversible (car triangulaire supérieure à termes tous non nuls sur la diagonale principale).
Donc $\operatorname{Ker} r=\{0_{\mathbf{R}_2[X]}\}$ et $\operatorname{Im} r=\mathbf{R}_2[X]$.

3) Exprimons, pour tout polynôme $P\in\mathbb{R}_n[X]$ non nul, le degré et le coefficient dominant de $r(P)$ à l'aide du degré et du coefficient dominant de P.
Si d est le degré de P, et a le coefficient dominant de P, on a : $P=aX^d+Q$, où $\deg(Q)<d$.
Alors $r(P)(X)=a(X+1)^d+Q(X+)=aX^d+R$, où $\deg R<d$.
En conclusion, $r(P)$ et P ont le même degré et le même coefficient dominant.

4) Soient $P\in\mathbb{R}_n[X]$ et $k\in\mathbb{N}$. Par une récurrence évidente, $r^k(P)(X)=P(X+k)$.

5) Donnons la matrice $M=(M_{i,j})$ de r dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
Le $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique est X^{j-1}, pour tout entier j entre 1 et $n+1$. On a :

$$r(X^{j-1})=(X+1)^{j-1}=\sum_{i=0}^{j-1}\binom{j-1}{i}X^i=\sum_{i=1}^{j}\binom{j-1}{i-1}X^{i-1}=\sum_{i=1}^{n+1}\binom{j-1}{i-1}X^{i-1},$$

en posant $\binom{j-1}{i-1}=0$ si $i>j$.
Pour tout $(i,j)\in(⟦1,n+1⟧)^2$, $M_{i,j}=\binom{j-1}{i-1}$.

6) La matrice M est triangulaire supérieure et n'a que des 1 sur la diagonale principale.
Donc le polynôme caractéristique de r, $\chi_r(X)=\mathsf{Det}\,(XI_{n+1}-M)=(X-1)^{n+1}$.
Ses valeurs propres sont ainsi toutes égales à 1 et si M était diagonalisable, elle serait semblable à I_{n+1} (et donc égale à I_{n+1}), ce qui est absurde.
Et on peut conclure : l'endomorphisme r n'est pas diagonalisable.

7) L'endomorphisme r est un isomorphisme car $\mathsf{Det}\, r=\mathsf{Det}\, M=1$.
On peut préciser $r^{-1}:P\mapsto P(X-1)$.
On en déduit que pour tout $k\in\mathbf{N}$, $r^{-k}(P)(X)=P(X-k)$. L'expression de r^k trouvée pour $k\in\mathbb{N}$ est donc encore valable pour tout $k\in\mathbb{Z}$.

8) Exprimons les coefficients de la matrice M^{-1}.
Pour tout $j\in⟦1,n+1⟧$,

$$r^{-1}(X^{j-1})=(X-1)^{j-1}=\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^{j-1-i}\binom{j-1}{i}X^i=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1}X^{i-1}.$$

Pour tout $(i,j)\in(⟦1,n+1⟧)^2$, $M_{i,j}=(-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1}$.

9)a) On considère une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. $\forall k\in\mathbb{N}$: (1) $\quad v_k=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}u_j$.

Notons $u'_i=u_{i-1}$ et $v'_=u_{i-1}$ pour tout $i\geqslant 1$ et alors on a des indices commençant à 1. (1) devient, pour tout i de 1 à $n+1$,

$$v'_i=v_{i-1}=\sum_{j=0}^{i-1}\binom{i-1}{j}u_j=\sum_{j=1}^{i}\binom{i-1}{j-1}u_{j-1}=\sum_{j=1}^{n+1}\binom{i-1}{j-1}u'_j,$$

et on a : $v'_i=\sum_{j=1}^{n+1}M_{j,i}u'_j$. La matrice Q définie par $Q_{i,j}=M_{j,i}$ ($Q=M^T$) est la bonne.

On écrit :

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = M^T \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

9)b) On écrit alors, d'après la question précédente :

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \vdots \\ u'_{n+1} \end{pmatrix} = (M^T)^{-1} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_{n+1} \end{pmatrix} = (M^{-1})^T \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Cela s'écrit, en développant, pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$,

$$u'_i = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-i} \binom{i-1}{j-1} v'_j = \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j-i} \binom{i-1}{j-1} v_{j-1} = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1-i} \binom{i-1}{j} v_j.$$

Donc, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $u_i = u'_{i+1} = \displaystyle\sum_{j=0}^{i} (-1)^{j-i} \binom{i}{j} v_j$. C'est bien (2).

9)c) On considère ici un réel λ et la suite u définie par $u_k = \lambda^k$ pour tout $k \in \mathbb{K}$. Alors :

$$v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda_j = (1+\lambda)^k.$$

La formule inverse est : $\lambda^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (1+\lambda)^j$.
Elle est vérifiée car c'est le développement de $((1+\lambda)-1)^k$.

Partie B. Opérateur de différence

1) Montrons rapidement que δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
On a, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, et pour tout $a \in \mathbf{R}$,

$$\delta(P+aQ)(X) = (P+aQ)(X+1) - (P+aQ)(X) = P(X+1) - P(X) + a(Q(X+1) - Q(X)) = \delta(P)(X) + a\delta(Q)(X).$$

Puis, comme $(X+1)^k$ est un polynôme de degré k pour tout k, si $P(X)$ est de degré au plus n, le polynôme $P(X+1) - P(X)$ est de degré au plus n.

2) On suppose $n = 2$ dans cette question **seulement**.
Écrivons la matrice Δ de δ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$\delta(1) = 0,\ \delta(X) = 1,\ \delta(X^2) = 1 + 2X.$$

Ainsi :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque immédiatement que Δ est triangulaire supérieure à termes tous nuls sur la diagonale principale). Le rang de Δ est 2. Donc $\operatorname{Ker}\delta$ est, d'après le théorème du rang, de dimension 1 et comme $\delta(1) = 0$, $\operatorname{Ker}\delta$ est la droite vectorielle $\mathsf{Vect}\,(1)$.
Puis $\operatorname{Im}\delta$ est de dimension 2 et comme $\delta(X)$ et $\delta(X^2)$ sont de degré au plus 1, $\operatorname{Im}\delta = \mathbf{R}_1[X]$.

3) Exprimons, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul, le degré et le coefficient dominant de $\delta(P)$ à l'aide du degré et du coefficient dominant de P.
Si P est constant, $\delta(P)$ est nul et son degré est $-\infty$.
Si P est de degré 1, $P = aX + b$ et $\delta(P) = a(X+1) + b - aX - b = a$. Donc $\delta(P)$ est de degré 0 et son coefficient dominant est le même que celui de P.
Passons au cas géneral. Posons encore a le coefficient dominant de P et $d \geqslant 2$ son degré.
On a : $P = aX^d + Q$ où $\deg Q < d$.

$$\delta(P) = a((X+1)^d - X^d) + Q(X+1) - Q(X) = a(dX^{d-1} + R) + Q(X+1) - Q(X),$$

où $\deg R \leqslant d-2$. Comme $Q(X+1) - Q(X)$ lui aussi a un degré $\leqslant d-2$, on peut en déduire que le degré de $\delta(P)$ est $d-1$ et son coefficient dominant est ad.

4) Comme $\delta(1) = 0$, $\mathbf{R}_1[X] \subset \operatorname{Ker}\delta$. Si $\deg P > 1$, alors $\delta(P) \neq 0$. Donc : $\mathbf{R}_1[X] = \operatorname{Ker}\delta$.
Par le théorème du rang, $\operatorname{Im}\delta$ est de dimension $n+1-1 = n$. Le calcul précédent montre que $\operatorname{Im}\delta \subset \mathbf{R}_{n-1}[X]$.
En utilisant les dimensions, on peut conclure que : $\operatorname{Im}\delta = \mathbf{R}_{n-1}[X]$.

5)a) Le calcul précédent montre, par une récurrence immédiate, que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, et tout polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$ vérifiant $\deg P \geqslant j$, on a :

$$\deg(\delta^j(P)) = \deg P - j.$$

Si $\deg P \leqslant j-1$, alors $\delta^j(P) = 0$.

5)b) Alors si $\deg P \geqslant j$, $\delta^p(P) \neq 0$ et $\operatorname{Ker}(\delta^j) = \mathbf{R}_{j-1}[X]$.
La même formule sur les degrés montre que $\operatorname{Im}(\delta^j) \subset \mathbf{R}_{n-j}[X]$.
En utilisant encore une fois le théorème du rang, on conclut : $\operatorname{Im}(\delta^j) = \mathbf{R}_{n-j}[X]$.

6) Soient $k \in \mathbb{N}$. Les endomorphismes r et $-Id$ commutent, donc :

$$(r - Id)^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} r^j.$$

Donc, en appliquant pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\delta^k(P) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} r^j(P) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} P(X+j).$$

On a donc bien exprimé $\delta^k(P)$ en fonction des $r^j(P)$ pour $j \in [\![0, k]\!]$.

7) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Alors $\delta^n(P) = 0$ et : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X+j) = 0$. Il suffit de prendre $X = 0$.

$$(3) \quad \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0.$$

8)a) ϕ et δ^2 commutent car :

$$\phi \, o \, \delta^2 = \phi \, o \, \phi^4 = \phi^5 = \phi^4 \, o \, \phi = \delta^2 \, o \, \phi.$$

8)b) Comme ϕ et δ^2 commutent, $\operatorname{Ker}(\delta^2)$ est stable par ϕ. En effet, si $P \in \operatorname{Ker}(\delta^2)$:

$$\delta^2(\phi(P)) = \phi(\delta^2(P)) = \phi(0) = 0.$$

Et donc $\phi(P) \in \operatorname{Ker}(\delta^2)$. Comme $\operatorname{Ker}(\delta^2) = \mathbf{R}_1[X]$, le résultat est établi.
On a bien : $\phi(\mathbb{R}_1[X]) \subset \mathbb{R}_1[X]$.

8)c)i) On veut montrer ici qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour cela, on va raisonner par l'absurde et supposons l'existence d'une telle matrice et appelons f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
Montrons qu'alors f ne peut être ni injectif, ni nul et qu'il est de rang 1.

Soit g, l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ associé canoniquement à $\mathbf{R}^2$. Alors $f^2 = g$. Et on a : $g(e_1) = 0$ et $g(e_2) = e_1$. Si f est injective, alors f est bijective (endomorphisme en dimension finie), donc $f^2 = g$ est bijective, or $e_1 \in \mathsf{Ker}\, g$. Absurde. Donc f n'est pas injective. Il est clair que f n'est pas nul (car g le serait aussi). Le noyau de f est donc de dimension 1 et d'après l'incontournable théorème du rang, le rang de f est 1.

8)c)ii) On veut montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans E. $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont deux droites vectorielles. S'il existe un vecteur non nul commun aux deux, ils sont égaux. Alors $f^2 = 0 = g$. Absurde. Donc $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$. On conclut encore avec le théorème du rang.

8)c)iii) Rapidement $f^4 = g^2 = 0$.
Soit une base (v_1) de $\operatorname{Im} f$ et son image par f est $f(v_1) \in \mathsf{Im}\, f$. Donc il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $f(v_1) = av_1$. Comme $v_1 \notin \mathsf{Ker}\, f$, $a \neq 0$. Donc $f^4(v_1) = a^4 v_1 \neq 0$, ce qui est absurde.

8)d) On considère maintenant l'endomorphisme ψ induit par ϕ sur $\mathbb{R}_1[X]$. (Il est bien défini car $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par ϕ.
Notons M la matrice de ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$.
Alors $\psi^2 = \delta$ et donc M^2 a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. C'est A^2.

Comme il n'existe pas de matrice M telle que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on arrive à l'absurdité.

9)a) Dans cette question, on cherche tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par δ.
Soit P un polynôme non nul de degré $d \leqslant n$. Montrons que la famille

$$\left(P,\, \delta(P),\, ...,\, \delta^d(P)\right)$$

est libre. Cette famille est échelonnée en degrés (aucun de ces vecteurs n'est le polynôme nul). Et elle est donc libre.
Comme tous ces vecteurs sont dans $\mathbf{R}_d[X]$, alors :

$$\mathsf{Vect}\,\left(P,\, \delta(P),\, ...,\, \delta^d(P)\right) \subset \mathbf{R}_d[X].$$

Comme cette famille libre comporte $d+1$ vecteurs et comme $\mathsf{dim}\,\mathbf{R}_d[X] = d+1$, on peut conclure :

$$\mathsf{Vect}\,\left(P,\, \delta(P),\, ...,\, \delta^d(P)\right) = \mathbf{R}_d[X].$$

9)b) Soit V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et différent de $\left\{\vec{0}_{\mathbb{R}_n[X]}\right\}$. Soit d le degré maximal d'un polynôme appartenant à V et P est un polynôme de degré d appartenant à V. Par stabilité, les polynômes $\delta^k(P)$, pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, appartiennent tous à V donc V contient $\mathbf{R}_d[X]$ d'après **9)a)**. Comme aucu polynôme de V n'est de degré supérieur (strictement) à d, c'est même une égalité.