TSI2. Concours Blanc 2016

Épreuve de Mathématiques

Durée 4 heures. Les calculatrices sont autorisées

La rigueur du raisonnement et la clartéseront prises en compte dans la notation.
Les deux problèmes ci-aprés sont indépendants et au niveau du barème, le premier problème a un poids de 3/5 et le second a un poids de 2/5 environ.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème 01

Les parties A et B peuvent se traiter de façon indépendante.

Pour $n \in \mathbf{N}^\star$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (*resp.* $GL_n(\mathbf{R})$) l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels (*resp.* des matrices carrées d'ordre n inversibles et à coefficients réels), M^T désigne la transposée de M et $Tr(M)$ désigne la trace de M.
On rappelle que le ***spectre*** de M est l'ensemble des valeurs propres complexes de M.
On appelle vecteur colonne de $\mathbf{R}^n$ toute matrice à n lignes et une colonne à coefficients dans $\mathbf{R}$.
On dit qu'un vecteur colonne est ***stochastique*** lorsque ses coefficients sont tous positifs et que la somme de ces coefficients vaut 1.
On dit qu'une matrice carrée est ***stochastique*** lorsque chacune de ses colonnes l'est.

Partie A. Un exemple en dimension 3

Dans cette partie, on étudie les trois suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ définies par les conditions initiales $x_0 = y_0 = \dfrac{1}{2}$, $z_0 = 0$ et la rÃécurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} &= \dfrac{7}{10}x_n + \dfrac{2}{5}y_n + \dfrac{1}{2}z_n \\[2ex] y_{n+1} &= \dfrac{3}{10}x_n + \dfrac{1}{10}z_n \\[2ex] z_{n+1} &= \dfrac{3}{5}y_n + \dfrac{2}{5}z_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le système (R) s'écrit sous la forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$, où $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ devra être explicitée.
2. Vérifier que A est stochastique.
3. Calculer $Tr(A)$ et $\mathsf{Det}\,(A)$. A est-elle inversible ?
4. Prouver que le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A^T. Quelle est la valeur propre associée ?
5. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Montrer que M et M^T ont le même polynôme caractéristique et établir que M admet trois valeurs propres complexes (éventuellement non distinctes) que l'on note λ_1, λ_2, λ_3 et que $Tr(M) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.
6. Déduire des questions précédentes (donc sans calculer explicitement le polynôme caractéristique χ_A de A) que le spectre de A est $\left\{0, \dfrac{1}{10}, 1\right\}$.
7. Justifier qu'il existe une matrice P de $GL_3(\mathbf{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & -2 & b \end{pmatrix},$$

   où a et b sont des réels que l'on déterminera.

8. Calculer P^{-1}.
9. Exprimer X_n en fonction de P, D^n, P^{-1} et X_0 puis en fonction de n seul.
10. Montrer que X_n est stochastique.
11. Prouver que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (*resp.* $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$) est convergente vers une limite notée l_x (*resp.* l_y et l_z).
12. Prouver que le vecteur colonne $L = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix}$ est stochastique et est vecteur propre de A.

Partie B. Cas de la dimension 2

Soit A une matrice stochastique de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et on pose le vecteur colonne $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On considère une suite (X_n) de vecteurs colonnes de $\mathbf{R}^2$ telle que X_0 soit stochastique et telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

1. Montrer qu'il existe a et b deux réels de $[0,1]$ tels que :
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}.$$
On définit deux suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$
2. Démontrer que le vecteur colonne X_n est stochastique pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3. Montrer que $0 \leq Tr(A) \leq 2$.
4. On suppose ici que $Tr(A) = 0$. Expliciter A. Que vaut A^2 ? Que se passe t-il pour (X_n) ?
5. On suppose ici que $Tr(A) = 2$. Expliciter A. Que se passe t-il pour (X_n) ?
On suppose désormais que $0 < Tr(A) < 2$.
6. Montrer que $-1 < a - b < 1$.
7. Montrer que V est un vecteur propre de A. Exprimer la valeur propre associée, notée q, en fonction de a et de b. Prouver que $|q| < 1$.
8. Établir que 1 est une valeur propre. En déduire que A est diagonalisable.
9. Établir qu'il existe un vecteur colonne de $\mathbf{R}^2$, $L = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \end{pmatrix}$ et un réel λ tel que :
$$AL = L \text{ et } X_0 = L + \lambda V.$$
On ne cherchera pas à calculer l_x, l_y et λ.
10. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$X_n = L + q^n \lambda V.$$
11. Prouver que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (*resp.* $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$) est convergente vers l_x (*resp.* l_y).
12. En déduire que le vecteur colonne L est stochastique.

Problème 02

On note E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continues, E_1 le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
On note, pour tout $f \in E$, $T(f)$ l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbf{R}$, par :

$$T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt.$$

Partie A. Propriétés générales de T

1. Établir que, pour tout élément f de E, $T(f)$ appartient à E_1 et que, pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$(T(f))'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)).$$
On note dans la suite $T : E \to E$ l'application qui, à f associe $T(f)$.
2. Montrer que T est un endomorphisme de E.
3. Est-ce que T est surjectif ?
4. Soit $f \in E$, montrer que si f est paire (*resp.* impaire) alors $T(f)$ est paire (*resp.* impaire).
5. Soit $f \in E$, montrer que si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge alors $T(f)(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.
6. On note $s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $t \mapsto \sin(\pi\, t)$. Calculer $T(s)$.
Est-ce que T est injectif ?

Partie B. Premier exemple

On note, pour tout $a \in \mathbf{R}$, $f_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $t \mapsto f_a(t) = e^{at}$.
On rappelle que pour tout $t \in \mathbf{R}$ alors $\operatorname{sh} t = \dfrac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right)$.

1. Calculer pour tout $a \in \mathbf{R}$ et tout $x \in \mathbf{R}$, $T(f_a)(x)$.
On note $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $a \mapsto \phi(a) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}(a)}{a} & \text{si} \quad a \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad a = 0 \end{cases}$
2. Établir : $\forall a \in \mathbf{R}$, $T(f_a) = \phi(a)\, f_a$.
3. Montrer que ϕ est continue puis dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer, pour tout $a \in \mathbf{R}$, $\phi'(a)$.
Étudier, selon $a \in \mathbf{R}$, le signe de $e^a(a-1) + e^{-a}(a+1)$.
En déduire les variations de ϕ et tracer l'allure de sa représentation graphique.
4. En déduire que, pour tout $\lambda \in [1, +\infty[$, il existe $f \in E$ tel que : $T(f) = \lambda f$.

Partie C. Deuxième exemple

On note $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $t \mapsto h(t) = \dfrac{1}{|t|+1}$.

1. Vérifier que $h \in E$ et calculer, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $T(h)(x)$.
À cet effet, on remarquera que h est paire et on distinguera les cas $0 \le x \le 1$ et $1 < x$.
2. Étudier les variations de $T(h)$ et tracer l'allure de sa représentation graphique.
On précisera les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1. On donne $\ln 2 \sim 0.7$ et $\ln 3 \sim 1.1$.
3. Est-ce que la réciproque du résultat obtenu dans la question 5 est vraie, c'est-à -dire, est-ce que, pour tout élément f de E, si $T(f)(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge ?