TSI2. Concours Blanc 2017

Épreuve de Mathématiques

Durée 4 heures. Les calculatrices sont interdites

La rigueur du raisonnement et la clarté seront prises en compte dans la notation. Les deux problèmes ci-aprés sont indépendants et au niveau du barème, ont un poids respectifs d'environ 11/20 et 09/20.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème 01

Soit ζ la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par la relation : $\forall x > 1,\ \zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, on note ϕ_k la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $\forall x \geqslant 1,\ \phi_k(x) = \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x^{k+1}}$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.
Pour tout entier $k \geqslant 2$, on pose : $S_k = \displaystyle\int_1^{+\infty} \phi_k(x)\,dx$ et $T_k = \displaystyle\int_2^{+\infty} \phi_k(x)\,dx$.
De même, pour tout entier $k \geqslant 2$ et tout $n \geqslant 1$, on pose : $f_n(k) = \displaystyle\int_n^{n+1} \phi_k(x)\,dx$.
On rappelle, de plus, que pour tout réel x, on a : $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$.

Partie A. Un préliminaire.

On admettra ici et dans le reste du problème le résultat suivant : si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite dite alternée, c'est-à-dire si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (-1)^n |u_n|$ ou si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (-1)^{n+1}|u_n|$, et si de plus la suite $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ décroît vers 0, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$. (Si la suite (u_n) n'est définie qu'à partir de $n_0 \geqslant 0$, on étend sans problème le résultat précédent.)

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.
2. Indiquer une méthode permettant de trouver une valeur approchée de la somme de la série précédente à ϵ près. Faire un programme PYTHON qui l'illustre en prenant cet ϵ comme argument. On rappelle que $mt.floor(x)$ fournit la partie entière de x (avec mt pour alias du module $math$).

Partie B. Convergence et calcul de l'intégrale généralisée S_k

On pose k un entier supérieur ou égal à 2.

1. Justifier l'existence de $\zeta(x)$ pour tout $x > 1$ fixé.
2. Justifier que $\lfloor x \rfloor \in O(x)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire la convergence des intégrales généralisées S_k et T_k.
3. Montrer : $\forall n \geqslant 1,\ f_n(k) = \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{n^{k-1}} - \dfrac{1}{(n+1)^{k-1}}\right) + \dfrac{1}{k(n+1)^k}$.

4. En déduire que $\lim_{N\to+\infty} k\sum_{n=1}^{N} f_n(k) = \zeta(k)$.
5. Exprimer S_k en fonction de $\zeta(k)$.

Partie C. Convergence des séries de termes généraux $(-1)^k S_k$ ***et*** $(-1)^k T_k$

1. Si $k \geqslant 2$, montrer : $|(-1)^k T_k| \leqslant \dfrac{2}{k-1}\dfrac{1}{2^k}$.
   En déduire la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 2}(-1)^k T_k$.
2. Montrer que si $k \geqslant 2$, $0 \leqslant S_k \leqslant \dfrac{1}{k-1}$. En déduire $\lim_{k\to+\infty} S_k$.
   Montrer de même que $S_{k+1} \leqslant S_k$. En déduire la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 2}(-1)^k S_k$.
3. À partir de cette question, on pose : $S = \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k S_k$ et $T = \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k T_k$.
   On considère la série entière $\sum_{k\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$. Déterminer son rayon de convergence et trouver sa somme, que l'on notera $W(x)$ dans la suite.
   En déduire les sommes $\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{k\,2^k}$.
4. Montrer : $\forall n \geqslant 2$, $\sum_{k=2}^{n}(-1)^k S_k = \sum_{k=2}^{n}(-1)^k \int_1^2 \phi_k(t)\,dt + \sum_{k=2}^{n}(-1)^k T_k$.
5. En déduire une relation liant S et T.

Partie D. Expression de $T = \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k T_k$ ***à l'aide d'une intégrale***

On pose ici la fonction ϕ définie sur $[2, +\infty[$ par : $\phi(x) = \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x^2(1+x)}$.

1. Établir l'existence de $\int_2^{+\infty}\phi(x)\,dx$.
   Puis montrer : $\sum_{k=2}^{n}(-1)^k T_k = \int_2^{+\infty}\phi(x)\,dx + (-1)^n\int_2^{+\infty}\dfrac{\lfloor x \rfloor}{x^{n+1}(1+x)}\,dx$.
2. En déduire que $T = \int_2^{+\infty}\phi(x)\,dx$.

Partie E. Calcul de $S = \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k S_k$

Soient, pour tout $n \geqslant 1$, $h_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ et $c_n = \left(\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\right) - \ln n$.

1. Établir la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} h_n$. On notera H sa somme.

2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, $\displaystyle\int_2^n \phi(x)\,dx = \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{k}{x^2(x+1)}\,dx$.
3. Pour tout réel $x \notin \{-1, 0\}$, déterminer trois réels a, b et c tels que :
$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}.$$
4. Montrer pour tout $k \geqslant 2$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2(x+1)} = \frac{1}{k(k+1)} - W\left(\frac{1}{k}\right) + W\left(\frac{1}{k+1}\right)$.
5. Déduire de l'égalité de la question E-2 et de la question E-4, une relation entre T et H. Puis montrer que $H = S$.
6. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} (c_{n+1} - c_n)$ est convergente. En déduire la convergence de la suite $(c_n)_{n \geqslant 1}$. On notera γ la limite de cette suite. (Appelée constante d'Euler.)
7. Calculer H en fonction de γ.

Problème 02

Soit n un entier supérieur ou égal à n et $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.
Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note $\mathsf{Sp}\,(M)$ le spectre de M, $\mathsf{Rg}\,(M)$ le rang de M puis pour tout scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$, $E_\lambda(M) = \mathsf{Ker}\,(M - \lambda I_n)$ et $Im_\lambda(M) = \mathsf{Im}\,(M - \lambda I_n)$.
Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note $[A, B]$ la matrice de $\mathcal{M}_\backslash(\mathbf{K})$ définie par :
$$[A, B] = AB - BA.$$
Si f et g sont deux endomorphismes de E, espace vectoriel sur $\mathbf{K}$, on note$[f, g]$ l'endomorphisme de E défini par : $[f, g] = f\,o\,g - g\,o\,f$.

Partie A. Étude d'un cas particulier

On considère les matrices carrées suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$
ainsi que les matrices colonne
$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ U_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } U_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. On étudie A.
   (a) Déterminer $\mathsf{Sp}\,(A)$.
   (b) On pose ici et dans la suite $\mathcal{F} = (U_1, U_2, U_3)$. Vérifier que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ constituée de vecteurs propres de A.
   (c) La matrice A est-elle diagonalisable ?
   (d) Montrer qu'aucun des éléments de $\mathcal{F}$ n'est un vecteur propre commun à A et à B.
2. On étudie maintenant B.
   (a) Déterminer $\mathsf{Sp}\,(B)$.

(b) Montrer que $\mathsf{Im}_2(B) = \mathsf{Vect}\,(U_4)$ et que $\mathsf{dim}\, E_2(B) = 2$.
(c) La matrice B est-elle diagonalisable ?
(d) Montrer que $E_1(A) \cap E_2(B) = \mathsf{Vect}\,(U_5)$.
(e) Déterminer tous les vecteurs propres communs à A et à B.

3. On étudie ici C.
   (a) Vérifier que $[A, B] = C$.
   (b) Déterminer le polynôme caractéristique de C. Montrer que C est semblable à D. Déterminer $\mathsf{Rg}\,(C)$.

Partie B. Condition nécessaire et conditions suffisantes

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

1. Dans cette question, on suppose qu'il existe $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, vecteur propre commun à la fois à la matrice A et à la matrice B.
   (a) Montrer que $U \in \mathsf{Ker}\,([A, B])$.
   (b) Pourquoi $\mathsf{Rg}\,([A, B]) < n$?

   Dans toute la suite de cette partie, on suppose que $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.
   On dit que A ***et*** B ***vérifient la propriété*** $\mathcal{H}$ ***si, et seulement si, il existe*** $\lambda \in \mathsf{Sp}\,(A)$ ***tel que***
   $$E_\lambda(A) \subset \mathsf{Ker}\,([A, B]).$$

2. Montrer que si $[A, B] = 0$ alors A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.
3. Dans cette question, on suppose que A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$ et on choisit un scalaire $\lambda \in \mathsf{Sp}\,(A)$ tel que $E_\lambda(A) \subset \mathsf{Ker}\,([A, B])$.
   (a) Montrer que l'application $\Psi : X \in E_\lambda(A) \mapsto BX$ définit un endomorphisme de $E_\lambda(A)$.
   (b) En déduire l'existence d'un vecteur propre commun à A et à B.

   Dans la suite, pour $k \in \mathbf{N}^\star$, ***on note*** $\mathcal{P}_k$ ***la propriété suivante :***
   « ***pour tout*** $\mathbf{C}$***-espace vectoriel*** E ***de dimension*** k ***et pour tout couple d'endomorphismes*** (ϕ, ψ) ***de*** E ***tels que*** $\mathsf{Rg}\,([\phi, \psi]) \leqslant 1$, ***il existe un vecteur propre commun à*** ϕ ***et*** ψ. »

4. Vérifier la propriété $\mathcal{P}_1$.
5. Dans cette question, on suppose que la propriété $\mathcal{P}_k$ est vérifiée pour tout entier k appartenant à $[\![1, n-1]\!]$ et que les matrices A et B ne vérifient pas la propriété $\mathcal{H}$.
   On note $C = [A, B]$ et on suppose que $\mathsf{Rg}\,(C) = 1$.
   On considère une valeur propre λ de A.
   (a) Justifier l'existence de $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ tel que $AU = \lambda U$ et $CU \neq 0$.
   (b) Vérifier que : $\mathsf{Im}\, C = \mathsf{Vect}\,(V)$, où $V = CU$.
   (c) Montrer que : $\mathsf{Im}\, C \subset \mathsf{Im}_\lambda(A)$.
   (d) Établir que :
   $$1 \leqslant \mathsf{dim}\,(\mathsf{Im}_\lambda(A)) \leqslant n - 1.$$
   (e) Pour tout $X \in \mathsf{Im}_\lambda(A)$, on pose dans la suite : $\phi(X) = AX$ et $\psi(X) = BX$.
   Montrer que $[A, A - \lambda I_n] = 0$ et que $[B, A - \lambda I_n] = -C$.
   Montrer que ϕ et ψ sont des endomorphismes de $\mathsf{Im}_\lambda(A)$.
   (f) Montrer : $\mathsf{Rg}\,([\phi, \psi]) \leqslant 1$. En déduire l'existence d'un vecteur commun à ϕ et à ψ et qu'il en est de même pour A et B.
6. Montrer alors que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.