

Corrigé Modélisation

Q1) Calcul de l'accélération : on calcule le vecteur vitesse $\vec{V}_{G_2,2/0}$ puis on le dérive :

$$\begin{aligned}\vec{V}_{G_2,2/0} &= \left(\frac{d\overrightarrow{O_0G_2}}{dt} \right)_0 \\ \vec{V}_{G_2,2/0} &= \left(\frac{d}{dt}(X\vec{x}_0 + a\vec{x}_2) \right)_0 \\ \vec{V}_{G_2,2/0} &= \dot{X}\vec{x}_0 + a \left(\frac{d\vec{x}_2}{dt} \right)_0 \\ \vec{V}_{G_2,2/0} &= \dot{X}\vec{x}_0 + a\dot{\theta}_2\vec{y}_2\end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_{G_2,2/0} &= \left(\frac{d\vec{V}_{G_2,2/0}}{dt} \right)_0 \\ \vec{\Gamma}_{G_2,2/0} &= \left(\frac{d}{dt}(\dot{X}\vec{x}_0 + a\dot{\theta}_2\vec{y}_2) \right)_0 \\ \vec{\Gamma}_{G_2,2/0} &= \ddot{X}\vec{x}_0 + a(\ddot{\theta}_2\vec{y}_2 - \dot{\theta}_2^2\vec{x}_2)\end{aligned}$$

Or $\ddot{\theta}_2 = 0$, d'où :

$$\vec{\Gamma}_{G_2,2/O} = \ddot{X}\vec{x}_0 - a\dot{\theta}_2^2\vec{x}_2$$

Q2) Le repère R_0 est supposé en translation uniforme par rapport au référentiel terrestre, on peut donc le supposer galiléen.

J'applique le théorème de la résultante dynamique au solide S_2 :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{P} &= m\vec{\Gamma}_{G_2,2/0} \\ \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + mg\vec{x}_0 &= m(\ddot{X}(t)\vec{x}_0 - a\dot{\theta}_2^2\vec{x}_2) \\ \vec{F}_{1 \rightarrow 2} &= m(\ddot{X}(t) - g)\vec{x}_0 - ma\dot{\theta}_2^2\vec{x}_2\end{aligned}$$

En notant m la masselotte 2, on a d'après le théorème des actions réciproques :

$$\vec{F}_{m/1} = m(g - \ddot{X})\vec{x}_0 + ma\dot{\theta}_2^2\vec{x}_2$$

Q3) Etant donné que les deux roues dentées possèdent le même rayon, elles tournent à la même vitesse dans des sens opposés, on a donc la relation :

$$\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}_3$$

Q4) La résultante des forces centrifuges est la somme des forces centrifuges appliquée à chaque masselotte :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{m/1}^c &= \vec{F}_{2/1}^c + \vec{F}_{3/1}^c \\ \vec{F}_{m/1}^c &= ma\dot{\theta}_2^2 \vec{x}_2 + ma\dot{\theta}_3^2 \vec{x}_3\end{aligned}$$

Or d'après la question 3, on a $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}_3$, on obtient alors :

$$\vec{F}_{m/1}^c = ma\dot{\theta}_2^2 (\vec{x}_2 + \vec{x}_3)$$

Q5) Pour que l'effort $\vec{F}_{m/1}^c$ reste vertical il faut que la composante selon \vec{y}_1 soit nulle :

$$\begin{aligned}\vec{x}_2 + \vec{x}_3 &= \cos(\theta_2)\vec{x}_1 + \sin(\theta_2)\vec{y}_1 + \cos(\theta_3)\vec{x}_1 + \sin(\theta_3)\vec{y}_1 \\ \vec{x}_2 + \vec{x}_3 &= (\cos(\theta_2) + \cos(\theta_3))\vec{x}_1 + (\sin(\theta_2) + \sin(\theta_3))\vec{y}_1\end{aligned}$$

Soit : $\sin(\theta_2) + \sin(\theta_3) = 0$

Q6) Pour respecter la condition de la question précédente, il faut que θ_3 et θ_2 soient en opposition de phase : $\theta_3 = \theta_2 \pm \pi$

Q7)

Q8) En positionnant les masselottes en opposition de phases, cela permet de limiter la résonance du système.

Q9) Le centre de gravité G_2 appartient à l'intersection des plans de symétrie, il est donc situé sur l'axe (O_2, \vec{x}_2)

Q10) Calcul du moment excentrique :

$$\begin{aligned}m_e &= 4ma \\ m_e &= \frac{16mR}{3\pi} \\ m_e &\approx 16kg.m\end{aligned}$$

Q11) Calcul de la force centrifuge maximale :

$$\begin{aligned} F_{max} &= m_e \Omega_{max}^2 \\ F_{max} &\approx 1.10^6 N \end{aligned}$$

Q12) Expression des vecteurs $\overrightarrow{O_O G}$ et $\overrightarrow{I J_O}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_O G} &= X(t) \vec{x}_0 \\ \overrightarrow{I J_O} &= (h - X - L) \vec{x}_0 \end{aligned}$$

Les efforts dus au ressort k_a et au ressort k_b valent :

$$\vec{F}_a = -k_a(X - l_a) \vec{x}_0 \quad \text{et} \quad \vec{F}_b = k_b(h - L - l_b - X) \vec{x}_0$$

Q13) J'applique le théorème de la résultante statique à l'ensemble V en projection sur \vec{x}_0 :

$$-k_a(X - l_a) + k_b(h - L - l_b - X) + Mg + \rho A_p L g = 0$$

Q14) A l'équilibre statique on a $\Omega = 0$ soit $F_e(t) = 0$. En note X_s la position d'équilibre de V, l'équation obtenue précédemment devient :

$$(M + \rho A_p L)g - k_a(X_s - l_a) - k_b(L + X_s + l_b - h) = 0$$

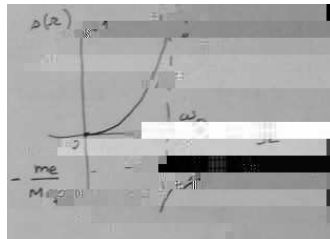
Q15) J'applique le théorème de la résultante dynamique à l'ensemble V en projection sur \vec{x}_0 :

$$\begin{aligned} M_t \ddot{X} &= M_t g - k_a(X - l_a) + k_b(h - L - X - l_b) + F_e(t) \\ M_t \ddot{X} &= -k_a(X - X_s) - k_b(X - X_s) + F_e(t) \\ M_t \ddot{X} + (k_a + k_b)(X - X_s) &= F_e(t) \\ M_t \ddot{X}(t) + K_t(X - X_s) &= F_e(t) \end{aligned}$$

Q16) Condition particulière : $u(t) = s(\Omega) \cos(\Omega t)$

$$\begin{aligned} (-\Omega^2 + \omega_0^2) s(\Omega) &= \frac{m_e \Omega^2}{M_t} \\ s(\Omega) &= \frac{m_e \Omega^2}{M_t(\omega_0^2 - \Omega^2)} \end{aligned}$$

Q17)



Q18) Quand Ω augmente, sa valeur passe par ω_0 telle que $s(\omega_0) \rightarrow \infty$: résonance.

En général il y a des frottements. Solution technologique qui permettrait de limiter la résonance : utilisation de filtre ?

Q19) Crête à crête d'où le "2" : $A_{max} = 2 \frac{m_e}{M} = \frac{2 \times 16}{3210} = 10^{-2} m$

Q20) ??

Q21)

$$\begin{aligned} \rho A_p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial N}{\partial x}(x, t) &= 0 \\ \frac{N(x, t)}{A_p} &= \sigma(x, t) = E \frac{\partial u}{\partial x} \\ N(x, t) &= E A_p \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

On remplace dans l'équation précédente et on obtient :

$$\begin{aligned} \rho A_p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - A_p E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\ c^2 &= \frac{E}{\rho} \end{aligned}$$

Q22) Considérons la masse M située au point G(x=0), les forces appliquées sont :

- le poids ;
- un seul effort normal $N(0, t) = E A_p \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) (0, t)$
- la force de rappel du ressort a
- la force d'excitation $F_e(t)$

On applique le PFS et le PFD et on obtient bien la relation (3) :

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) - E A_p \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + k_a u(0, t) = F_e \cos(\Omega t)$$

Considérons l'extrémité I de masse nulle, les forces appliquées sont :

- un seul effort normal $-N(L, t) = E A_p \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) (L, t)$
- la force de rappel du ressort b

La somme des forces est nulle, on obtient la relation (4) :

$$E A_p \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) + k_b u(L, t) = 0$$

Q23)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \varphi(x) p'(t) = \varphi(x) \omega (-C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t)) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\omega^2 \varphi(x) p(t) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \varphi'(x) p(t) = \frac{\omega}{c} \left(-A \sin\left(\frac{\omega}{c} x\right) + B \cos\left(\frac{\omega}{c} x\right) \right) p(t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{\omega^2}{c^2} \varphi(x) p(t) \end{aligned}$$

Q24) On écrit rapidement : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = -\omega^2 u(x, t) + \omega^2 u(x, t) = 0.$

Q25) L'égalité (3) permet d'écrire que la quantité

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) - EA_p \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + k_a u(0, t)$$

vaut :

$$M [-w^2 u(0, t)] - EA_p \left[\frac{BW}{C} \right] p(t) + k_a u(0, t),$$

c'est-à-dire :

$$-Mw^2 A (C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)) - \frac{EA_p B w}{C} (C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)) + k_a A (C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)).$$

En regroupant, l'égalité

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) - EA_p \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + k_a u(0, t) = 0$$

équivalent à l'égalité :

$$\left[-Mw^2 AC - \frac{EA_p B w C}{c} + k_a AC \right] \cos(\omega t) + \left[-Mw^2 AD - \frac{EA_p B w D}{c} + k_a AD \right] \sin(\omega t) = 0.$$

Comme cette égalité est valable pour tout t , on obtient :

$$\begin{cases} [-Mw^2 C + k_a C] A - \frac{EA_p w C}{c} B = 0 \\ [-Mw^2 D + k_a D] A - \frac{EA_p w D}{c} B = 0 \end{cases}.$$

De même, l'égalité (4) permet d'écrire que la quantité

$$EA_p \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) + k_b u(L, t)$$

vaut :

$$EA_p \left[-\frac{Aw}{c} \sin\left(\frac{wL}{c}\right) + \frac{Bw}{c} \cos\left(\frac{wL}{c}\right) \right] p(t) + k_b \left[A \cos\left(\frac{wL}{c}\right) + B \sin\left(\frac{wL}{c}\right) \right] p(t).$$

Cette quantité est donc nulle. On remplace ensuite $p(t)$ par $C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)$. Et on regroupe sous la forme :

$$(4') \quad G_1 \cos(\omega t) + G_2 \sin(\omega t) = 0,$$

avec :

$$\begin{cases} G_1 = \left(\frac{EA_p w B C}{c} + k_b C A \right) \cos\left(\frac{wL}{c}\right) + \left(-\frac{EA_p w A C}{c} + k_b C B \right) \sin\left(\frac{wL}{c}\right) \\ G_2 = \left(\frac{EA_p w B D}{c} + k_b D A \right) \cos\left(\frac{wL}{c}\right) + \left(-\frac{EA_p w A D}{c} + k_b B D \right) \sin\left(\frac{wL}{c}\right) \end{cases}$$

Comme (4') est valable pour tout t , on a : $G_1 = G_2 = 0$, ce qui donne le nouveau système, d'inconnues A et B :

$$\begin{cases} \left(-\frac{EA_p w C}{c} \sin\left(\frac{wL}{c}\right) + k_b C \cos\left(\frac{wL}{c}\right) \right) A + \left(\frac{EA_p w C}{c} \cos\left(\frac{wL}{c}\right) + k_b C \sin\left(\frac{wL}{c}\right) \right) B = 0 \\ \left(-\frac{EA_p w D}{c} \sin\left(\frac{wL}{c}\right) + k_b D \cos\left(\frac{wL}{c}\right) \right) A + \left(\frac{EA_p w D}{c} \cos\left(\frac{wL}{c}\right) + k_b D \sin\left(\frac{wL}{c}\right) \right) B = 0 \end{cases}.$$

En posant $\alpha = \frac{w}{c}L$, on a le système :

$$\begin{cases} \left(-\frac{EA_p w C}{c} \sin \alpha + k_b C \cos \alpha \right) A + \left(\frac{EA_p w C}{c} \cos \alpha + k_b C \sin \alpha \right) B = 0 \\ \left(-\frac{EA_p w D}{c} \sin \alpha + k_b D \cos \alpha \right) A + \left(\frac{EA_p w D}{c} \cos \alpha + k_b D \sin \alpha \right) B = 0 \end{cases}.$$

Q26) On sait qu'un système linéaire homogène admet des solutions non nulles si et seulement si son déterminant est nul. C'est-à-dire si :

$$\begin{vmatrix} -200\alpha^2 + 2 & -20\alpha \\ \cos \alpha - 20\alpha \sin \alpha & \sin \alpha + 20\alpha \cos \alpha \end{vmatrix} = 0.$$

En développant, cela donne :

$$-300\alpha^2 \sin \alpha - 2000\alpha^3 \cos \alpha + \sin \alpha + 30\alpha \cos \alpha = 0.$$

En posant $h(\alpha) = \alpha(30 - 2000\alpha^2) \cos \alpha + (1 - 300\alpha^2) \sin \alpha$, la condition est :

$$h(\alpha) = 0.$$

Q27) On remarque que $30 - 2000\alpha^2$ s'annule sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pour $\alpha = \sqrt{\frac{3}{200}}$ et que $1 - 300\alpha^2$ s'annule sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pour $\alpha = \sqrt{\frac{1}{300}}$. Puis $30 - 2000\alpha^2 < 0$ sur $\left]\sqrt{\frac{3}{200}}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $1 - 300\alpha^2 < 0$ sur $\left]\sqrt{\frac{1}{300}}, \frac{\pi}{2}\right]$. Comme $\sqrt{\frac{1}{300}} < \sqrt{\frac{3}{200}}$ et comme $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ sont strictement positifs sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc sur $\left]\sqrt{\frac{3}{200}}, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut conclure que $h(\alpha) < 0$ pour $\alpha \in \left]\sqrt{\frac{3}{200}}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Enfin, comme la figure (a) montre que h ne s'annule pas sur $\left[0, \sqrt{\frac{1}{300}}\right]$ et est positive sur cet intervalle, h (étant continue) s'annule au moins une fois sur $\left[\sqrt{\frac{1}{300}}, \sqrt{\frac{3}{200}}\right]$, intervalle strictement inclus dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Q28) La fonction h est dérivable sur \mathbb{R} car elle est une combinaison linéaire de fonctions dérivables sur \mathbb{R} . Rapidement, on a pour tout α ,

$$h'(\alpha) = (31 - 6300\alpha^2) \cos \alpha + \alpha(-630 + 2000\alpha^2) \sin \alpha.$$

Q29) Posons $J = \left[\sqrt{\frac{31}{6300}}, \sqrt{\frac{3}{200}}\right]$. La quantité $31 - 6300\alpha^2$ s'annule pour $\alpha = \sqrt{\frac{31}{6300}}$ et est négative sur J . De même, la quantité $-630 + 2000\alpha^2$ s'annule pour $\alpha = \sqrt{\frac{630}{2000}} > \sqrt{\frac{3}{200}}$ et est négative sur J . Comme α , $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ sont positifs sur J , la quantité $h'(\alpha)$ est négative sur J . (Et même strictement négative sur l'intérieur de J .) Donc h est strictement décroissante sur J . Enfin, d'après l'énoncé, on sait que $h\left(\sqrt{\frac{31}{6300}}\right) > 0$ et que $h\left(\sqrt{\frac{3}{200}}\right) < 0$. Comme h est continue (car c'est une combinaison linéaire de fonctions continues), d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on peut conclure : J contient une et une seule racine de h .

Q30) Les inégalités (valables pour $\alpha \in I = \left[\sqrt{\frac{1}{300}}, \sqrt{\frac{31}{6300}}\right]$) :

$$\alpha(30 - 2000\alpha^2) \cos \alpha > 1,1610 \text{ et } (1 - 300\alpha^2) \sin \alpha > -0,0334$$

permettent d'écrire :

$$\forall \alpha \in I, h(\alpha) = \alpha(30 - 2000\alpha^2) \cos \alpha + (1 - 300\alpha^2) \sin \alpha > 1,1610 - 0,0334 > 1.$$

Finalement, on sait déjà que h s'annule en $\alpha = 0$ et en $\alpha_1 \in J$ puis est strictement positive sur $]0, \alpha_1[$, et est strictement négative sur $]\alpha_1, \frac{\pi}{2}]$.

Q31) Au programme officiel, deux algorithmes sont possibles pour déterminer une solution approchée d'une racine de $h(\alpha) = 0$: l'algorithme de Dichotomie et l'algorithme de Newton. Pour faire un corrigé complet, proposons les deux.

Algorithme de Dichotomie

h est une fonction continue, posons n un entier supérieur ou égal à 2 fixé et $a = (2n - 3)\pi/2$, $b = (n - 1)\pi$. On sait qu'il existe un seul réel $\alpha_n \in [a, b]$ tel que $h(\alpha_n) = 0$. Le **principe de la dichotomie** consiste à obtenir une suite $(I_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de segments emboîtés, dont la longueur tend vers 0 et contenant chacun la limite α_n . En notant g_p et d_p les bornes de ces intervalles, on dispose de deux suites adjacentes, convergeant vers α_n . Pour obtenir cette suite de segments emboîtés, on procède comme suit :

- on pose initialement $g_0 = \min(a, b)$ et $d_0 = \max(a, b)$;
- en supposant construit le segment $I_p = [g_p, d_p]$, on pose $m = \frac{g_p + d_p}{2}$ (milieu du segment) et on calcule $h(m)$: si $h(m)$ est du signe opposé à $h(g_p)$ alors il existe une racine entre g_p et m ; on pose alors $I_{p+1} = [g_p, m]$, c'est-à-dire $g_{p+1} = g_p$ et $d_{p+1} = m$. Sinon, il y a une racine entre m et d_p , donc on pose $g_{p+1} = m$ et $d_{p+1} = d_p$.

Écrivons sous Python une fonction $dichotomie(h, a, b, epsilon)$ qui renvoie une valeur approchée à $epsilon$ près de α_n . On suppose que a et b vérifient les conditions plus haut.

```
>>> def dichotomie(h, a, b, epsilon) :
    g, d = min(a, b), max(a, b)
    while d - g > 2 * epsilon :
        m = (g + d) / 2
        if h(m) == 0 :
            return m
        elif h(g) * h(m) < 0 :
            d = m
        else :
            g = m
    return (g + d) / 2
```

On sort de la boucle *while* dès que $d - g \leq 2 * epsilon$. Le milieu de $[g, d]$ est bien à une distance de α_n (qui appartient à ce segment) d'au plus $epsilon$.

Algorithme de Newton

La méthode de Newton consiste en la construction d'une suite $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$. Le premier terme x_0 est choisi « proche » de α_n , solution de $h(x) = 0$ sur $[a, b]$. On choisit souvent $x_0 = a$. La valeur x_{p+1} est l'intersection de la tangente à la courbe représentative de h au point d'abscisse x_p avec l'axe des x . Écrivons une fonction Python $newton(h, dh, a, epsilon)$ qui met en oeuvre cette méthode (dh est la fonction dérivée de h) et la précision ϵ sera considérée atteinte lorsque $|h(x_p)| \leq \epsilon$.

La tangente en M d'abscisse x_p a pour équation : $y = h(x_p) + h'(x_p)(x - x_p)$.

Rapidement, on a : $x_{p+1} = x_p - \frac{h(x_p)}{h'(x_p)}$. Il reste à passer en Python. On suppose avoir rentré les fonctions h et dh .

```
>>> def newton(h, dh, a, epsilon) :
    x = a; p = 0; val = h(x)
    while abs(val) > epsilon :
        p += 1; x = x - val / dh(x); val = h(x)
    print("nombre d'itérations nécessaires : ", p); return(x)
```

Q32) D'après plus haut, α_n vérifiant $h(\alpha_n) = 0$, l'ensemble des solutions (A_n, B_n) de (H) correspondant à $\alpha = \alpha_n$ peut se mettre sous la forme $\left(A_n, \left(-10\alpha_n + \frac{1}{10\alpha_n} \right) A_n \right)$, où $A_n \in \mathbb{R}$. Si l'on fixe $A_n = 1$, on peut alors poser :

$$\phi_n(x) = \cos\left(\frac{\alpha_n x}{L}\right) + \left(-10\alpha_n + \frac{1}{10\alpha_n}\right) \sin\left(\frac{\alpha_n x}{L}\right).$$

Et donc (sachant que $L = 10$, d'après la donnée fournie page 8),

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= \cos\left(\frac{0.1161x}{10}\right) + \left(-10 \times 0.1161 + \frac{8.616}{10}\right) \sin\left(\frac{0.1161x}{10}\right) \\ &= \cos(0.01161x) - 0.3 \sin(0.01161x).\end{aligned}$$

Et de même,

$$\begin{aligned}\phi_2(x) &= \cos\left(\frac{1.6612x}{10}\right) + \left(-10 \times 1.6612 + \frac{0.60196}{10}\right) \sin\left(\frac{1.6612x}{10}\right) \\ &= \cos(0.6612x) - 16.55 \sin(0.01161x)\end{aligned}$$

On remarque que ϕ_1 est quasiment constant sur $[0, 10]$ (proche de 1) et par contre $\phi_2 \ll$ bouge \gg rapidement.

Remarque : les valeurs approchées données sont elles logiques, en égard aux valeurs numériques fournies page 8? On a $\rho = 7800$, $E = 2.1 \times 10^{11}$. Comme dans la question 21, on a vu que $c^2 = E/\rho$, ces valeurs donnent $c = 5188.75$. Si l'on remplace w par 60 dans $\alpha = wL/c$, on a $\alpha_1 = 0.1156$ (la valeur proposée dans l'énoncé est 0.1161), puis si l'on remplace w par 860 dans $\alpha = wL/c$, on a $\alpha_2 = 1.657$ (la valeur proposée dans l'énoncé est 1.6612), puis si l'on remplace w par 2500 dans $\alpha = wL/c$, on a $\alpha_3 = 4.818$ (la valeur proposée dans l'énoncé est 4.7440). Finalement, quel est l'intérêt de mettre deux chiffres après la virgule vu l'imprécision? (À part faire du calcul mental.)

Q33) Si le lâcher correspond au mode 1, $u(x, t) = \phi_1(x)p_1(t)$ et $u(x, t)$ est quasiment égal à $p_1(t) = C \cos(w_1 t) + D \sin(w_1 t)$. Le mouvement du profilé ne dépend que du temps t et quasiment pas de la distance x .

Si par contre, le lâcher correspond à un cumul des modes 1 et 2, $u(x, t) = \phi_1(x)p_1(t) + \phi_2(x)p_2(t)$ et $u(x, t)$ est une combinaison linéaire de cos et de sin de la variable x et de la variable t .

Q34) Montrons que la fonction $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $C([0, L], \mathbb{R})$.

■ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est **symétrique** :

pour tout $(f, g) \in [C([0, L], \mathbb{R})]^2$,

$$\langle f, g \rangle = \frac{EA_p}{c^2} \int_0^L f(x)g(x) dx + Mf(0)g(0) = \frac{EA_p}{c^2} \int_0^L g(x)f(x) dx + Mg(0)f(0) = \langle g, f \rangle.$$

■ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est **linéaire à gauche** :

pour tout $(f, g, h) \in [C([0, L], \mathbb{R})]^3$ pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\langle f + ag, h \rangle = \frac{EA_p}{c^2} \int_0^L (f(x) + ag(x))h(x) dx + M(f(0) + ag(0))h(0) = \langle f, h \rangle + a \langle f, g \rangle.$$

La linéarité à droite découle de la linéarité à gauche et de la symétrie.

■ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est **positive** :

pour tout $f \in C([0, L], \mathbb{R})$,

$$\langle f, f \rangle = \frac{EA_p}{c^2} \int_0^L f(x)^2 dx + Mf(0)^2 \geq 0.$$

■ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est **définie** :

pour tout $f \in C([0, L], \mathbb{R})$, l'égalité

$$\langle f, f \rangle = \frac{EA_p}{c^2} \int_0^L f(x)^2 dx + Mf(0)^2 = 0$$

implique que f est nulle sur $[0, L]$ (car f est continue sur $[0, L]$).

Q35) La quantité $w_n^2 \int_0^L \phi_n(x)\phi_r(x) dx$ vaut :

$$w_n^2 \int_0^L \left[A_n \cos\left(\frac{w_n}{c}x\right) + B_n \sin\left(\frac{w_n}{c}x\right) \right] \left[A_r \cos\left(\frac{w_r}{c}x\right) + B_r \sin\left(\frac{w_r}{c}x\right) \right] dx.$$

Et la quantité $c^2 \int_0^L \phi_n''(x)\phi_r(x) dx$ vaut :

$$c^2 \int_0^L \left[-\frac{A_n w_n^2}{c^2} \cos\left(\frac{w_n}{c}x\right) - \frac{B_n w_n^2}{c^2} \sin\left(\frac{w_n}{c}x\right) \right] \left[A_r \cos\left(\frac{w_r}{c}x\right) + B_r \sin\left(\frac{w_r}{c}x\right) \right] dx.$$

En les ajoutant, on a bien :

$$w_n^2 \int_0^L \phi_n(x)\phi_r(x) dx + c^2 \int_0^L \phi_n''(x)\phi_r(x) dx = 0.$$

Q36) Le résultat analogue donné à la fin de la question 35 peut se mettre sous la forme :

$$\int_0^L [c^2 \phi_n''(x)\phi_r(x) - c^2 \phi_n(x)\phi_r''(x)] dx = \frac{c^2 M}{EA_p} (w_n^2 - w_r^2) \phi_n(0)\phi_r(0).$$

On a aussi le résultat de Q35 et la même égalité en permutant n et r :

$$\begin{cases} w_n^2 \int_0^L \phi_n(x)\phi_r(x) dx + c^2 \int_0^L \phi_n''(x)\phi_r(x) dx = 0 \\ w_r^2 \int_0^L \phi_n(x)\phi_r(x) dx + c^2 \int_0^L \phi_r''(x)\phi_n(x) dx = 0 \end{cases}.$$

En combinant :

$$-w_n^2 \int_0^L \phi_n(x)\phi_r(x) dx + w_r^2 \int_0^L \phi_n(x)\phi_r(x) dx = \frac{c^2 M}{EA_p} (w_n^2 - w_r^2) \phi_n(0)\phi_r(0).$$

On divise par $w_r^2 - w_n^2$, ce qui donne :

$$\int_0^L \phi_n(x)\phi_r(x) dx = \frac{-c^2 M}{EA} \phi_n(0)\phi_r(0).$$

C'est-à-dire : $\frac{EA_p}{c^2} \int_0^L \phi_n(x)\phi_r(x) dx + M\phi_n(0)\phi_r(0)$.

C'est bien la relation (6) cherchée.

Q37) Partons de $I = \int_0^L \phi_r(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) dx$. Comme u est solution de (S), $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$

pour tout (x, t) et donc : $I = \int_0^L c^2 \phi_r(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dx$. Effectuons alors une intégration par parties :

$$I = -c^2 \int_0^L \phi_r'(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx + c^2 \left[\phi_r(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right]_{x=0}^{x=L}.$$

Ce qui donne :

$$I = -c^2 \int_0^L \phi_r'(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx + c^2 \left[\phi_r(L) \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) - \phi_r(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \right].$$

Ainsi la quantité $\int_0^L \phi_r(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) dx + c^2 \int_0^L \phi_r'(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx$ vaut :

$$c^2 \left[\phi_r(L) \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) - \phi_r(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \right].$$

Et la quantité $\frac{EA_p}{c^2} \left[\int_0^L \phi_r(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) dx + c^2 \int_0^L \phi_r'(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx \right]$ vaut :

$$EA_p \left[\phi_r(L) \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) - \phi_r(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \right].$$

Puis, on utilise les conditions aux limites :

$$\begin{cases} EA_p \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) + k_b u(L, t) & = & 0 \\ M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) - EA_p \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + k_a u(0, t) & = & F_e \cos(\Omega t) \end{cases}.$$

Et finalement, la quantité $\frac{EA_p}{c^2} \left[\int_0^L \phi_r(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) dx + c^2 \int_0^L \phi_r'(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx \right]$ vaut :

$$-\phi_r(L) k_b u(L, t) - \phi_r(0) \left[M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) + k_a u(0, t) - F_e \cos(\Omega t) \right].$$

On en déduit la relation voulue.

Q 38) Partons de $u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(x) q_n(t) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(x) q_n''(t)$ et $u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(x) q_n(t) \Rightarrow$

$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n'(x) q_n(t)$, en supposant que le passage à la dérivée première et à la dérivée se-

conde sous le signe somme soit licite. Il reste à remplacer $u(x, t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$ par ces sommes dans l'égalité trouvée à la question Q37. Alors la quantité

$$\frac{EA_p}{c^2} \int_0^L \left[\phi_r(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dx + c^2 \int_0^L \phi_r'(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx \right]$$

(que l'on appellera *SOM*) est égale à :

$$\frac{EA_p}{c^2} \int_0^L \left[\phi_r(x) \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(x) q_n''(t) dx + c^2 \phi_r'(x) \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n'(x) q_n(t) \right] dx,$$

qui vaut donc :

$$-\phi_r(L) k_b \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(L) q_n(t) - \phi_r(0) \left[M \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(0) q_n''(t) + k_a \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(0) q_n(t) - F_e \cos(\Omega t) \right].$$

On suppose que l'on puisse intervertir \int et \sum . Alors *SOM* peut s'écrire :

$$\frac{EA_p}{c^2} \sum_{n=1}^{+\infty} q_n''(t) \int_0^L \phi_r(x) \phi_n(x) dx + EA_p \sum_{n=1}^{+\infty} q_n(t) \int_0^L \phi_r'(x) \phi_n'(x) q_n(t) dx.$$

Et *SOM* peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1, n \neq r}^{+\infty} q_n''(t) [-M\phi_n(0)\phi_r(0)] + \frac{EA_p}{c^2} q_r''(t) \int_0^L \phi_r^2(x) dx \\ & + \sum_{n=1, n \neq r}^{+\infty} q_n(t) [-k_a\phi_n(0)\phi_r(0) - k_b\phi_n(L)\phi_n(L)] \\ & + EA_p q_r(t) \int_0^L \phi_r'(x) dx \end{aligned}$$

Ainsi la relation de Q37) devient :

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=1, n \neq r}^{+\infty} q_n''(t) M\phi_n(0)\phi_r(0) - \sum_{n=1, n \neq r}^{+\infty} k_a q_n(t) \phi_n(0)\phi_r(0) \\ & - \sum_{n=1, n \neq r}^{+\infty} k_b q_n(t) \phi_n(L)\phi_n(L) + \frac{EA_p}{c^2} q_r''(t) \int_0^L \phi_r^2(x) dx \\ & + EA_p q_r(t) \int_0^L \phi_r'^2(x) dx + \sum_{n=1}^{+\infty} k_b q_n(t) \phi_n(L)\phi_n(L) + \sum_{n=1}^{+\infty} q_n''(t) M\phi_n(0)\phi_r(0) \\ & + \sum_{n=1}^{+\infty} k_a q_n(t) \phi_n(0)\phi_r(0) = \phi_r(0) F_e \cos(\Omega t) \end{aligned}$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{EA_p}{c^2} \int_0^L \phi_r^2(x) dx \right] q_r''(t) + \left[EA_p \int_0^L \phi_r'^2(x) dx \right] q_r(t) \\ & + k_a^2 \phi_r^2(0) q_r(t) + k_b \phi_r^2(t)(L) + \phi_r^2(0) q''(t) M \\ & = \phi_r(0) F_e \cos(\Omega t) \end{aligned}$$

Il suffit de poser :

$$\begin{cases} K_n = EA_n \int_0^L \phi_n^2(x) dx + k_a^2 \phi_n^2(0) + k_b \phi_n^2(t)(L) \\ M_n = \frac{EA_p}{c^2} \int_0^L \phi_n^2(x) dx \\ F_n = \phi_r(0) F_e \end{cases} .$$

Q39) Montrons la convergence absolue de la série $\sum_n f_n(x)$. Le type de convergence voulue n'est pas indiquée (on peut montrer la convergence normale de $\sum_n f_n(x)$ donc la convergence

absolue car l'inégalité $|f_n(x_0)| \leq \frac{6L^2}{Mc^2 \alpha_{n-3}^3}$ est valable pour tout $x_0 \in [0, L]$). Le souci c'est que la convergence normale n'est pas au programme en 2TSI. Et l'étude de la convergence d'une série de fonction, de façon générale, aussi. Nous allons donc poser $x = x_0$ fixé et montrer seulement la convergence absolue donc la convergence simple. Il suffit de remarquer que $\alpha_{n-3} \in [(2(n-3) - 3)\pi/2, (n-3-1)\pi] = [(2n-9)\pi/2, (n-4)\pi]$ et donc pour tout $n \geq 5$,

$$|f_n(x_0)| \leq \frac{6L^2}{Mc^2 \alpha_{n-3}^3} \leq \frac{48L^2}{Mc^2 (2n-9)^3 \pi^3} .$$

Comme la série de terme général $\frac{1}{n^3}$ est convergente pour $n \geq 5$, il en est de même de la série de terme général $|f_n(x_0)|$ pour tout $x_0 \in [0, L]$ fixé.

Q40) On a : $\bar{u}(x) = ax + b$ et donc $\frac{d\bar{u}}{dx} = a$. Ce qui donne le système :

$$\begin{cases} -EA_p a + k_a b & = F_e \\ EA_p a + k_b(aL + b) & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -EA_p a + k_a b & = F_e \\ (EA_p + k_b L)a + k_b b & = 0 \end{cases} .$$

On résout ce système :

$$a = \frac{\begin{vmatrix} F_e & k_a \\ 0 & k_b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -EA_p & k_a \\ EA_p + k_b L & k_b \end{vmatrix}} = \frac{-F_e k_b}{EA_p k_b + k_a EA_p + k_a k_b L} .$$

Or, $\frac{k_a}{k_b} = 2$ et $a = \frac{-F_e}{3EA_p + k_a L}$. Puis $EA_p = \frac{MC^2}{10L}$ et $k_a = \frac{MC^2}{100L^2}$. Ainsi :

$$a = \frac{-F_e}{\frac{3MC^2}{10L} + \frac{MC^2}{100L}} = \frac{-100LF_e}{31MC^2} .$$

On passe à b :

$$b = \frac{\begin{vmatrix} -EA_p & F_e \\ EA_p + k_b L & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -EA_p & k_a \\ EA_p + k_b L & k_b \end{vmatrix}} = \frac{F_e [EA_p + k_b L]}{EA_p k_b + k_a EA_p + k_a k_b L} .$$

Ce qui donne, après un procédé similaire à a :

$$b = \frac{2100L^2 F_e}{31MC^2} .$$

Q41) On a : $u(x, t) = [f_1(x) + f_2(x)] F_e \cos(\Omega t) + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\phi_n(x)}{M_n W_n^2} F_e \cos(\Omega t)$.

Donc : $res(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\phi_n(x)}{M_n W_n^2} = \bar{u}(x) - \frac{\phi_1(x)}{K_1} F_e - \frac{\phi_2(x)}{K_2} F_e$.

Et $res(x) = ax + b - \frac{\phi_1(x)}{K_1} F_e - \frac{\phi_2(x)}{K_2} F_e$.

Avec les conditions numériques de l'énoncé : $L = 10$, $F_e = 10^3$, $M = 3210$, $c^2 = 2.7 \times 10^7$, $EA_p = 8.63 \times 10^8$, $k_a = 8.67 \times 10^6$, $k_b = 4.33 \times 10^6$, on trouve $a = -4 \times 10^{-7}$ et $b = 0.84 \times 10^{-4}$.

On retrouve : $-4.0 \times 10^{-10}(x - 210) = \frac{a}{F_e} x + \frac{b}{F_e}$.

Puis $M_1 = 3290$, $M_2 = 43500$, $w_1 = 60$ et $W_2 = 860$ donc :

$$f_1(x) = \frac{\phi_1(x)}{M_1(W_1^2 - \Omega^2)} = \frac{\phi_1(x)}{3290(60^2 - \Omega^2)} \text{ et } f_2(x) = \frac{\phi_2(x)}{M_2(W_2^2 - \Omega^2)} = \frac{\phi_2(x)}{43500(860^2 - \Omega^2)} .$$

Puis $K_1 = M_1 W_1^2 = 3290 \times 3600 = 1.2 \times 10^4$ et $K_2 = M_2 W_2^2 = 43500 \times 739600 = 3.2 \times 10^7$.

Cela donne : $\frac{\phi_1(x)}{K_1 F_e} = \frac{\phi_1(x)}{1.2 \times 10^4}$ et $\frac{\phi_2(x)}{K_2 F_e} = \frac{\phi_2(x)}{3.2 \times 10^{10}}$.

On retrouve les mêmes résultats à condition de prendre a/F_e à la place de a et b/F_e à la place de b .