Corrigé Modélisation

Q1) Calcul de l'accélération : on calcule le vecteur vitesse $\vec{V}_{G_2,2/0}$ puis on le dérive :

$$\begin{aligned}
\vec{V}_{G_2,2/0} &= \left(\frac{d\overrightarrow{O_0G_2}}{dt}\right)_0 \\
\vec{V}_{G_2,2/0} &= \left(\frac{d}{dt}(X\vec{x}_0 + a\vec{x}_2)\right)_0 \\
\vec{V}_{G_2,2/0} &= \dot{X}\vec{x}_0 + a\left(\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right)_0 \\
\vec{V}_{G_2,2/0} &= \dot{X}\vec{x}_0 + a\dot{\theta}_2\vec{y}_2
\end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
\vec{\Gamma}_{G_2,2/0} &= \left(\frac{d\vec{V}_{G_2,2/0}}{dt}\right)_0 \\
\vec{\Gamma}_{G_2,2/0} &= \left(\frac{d}{dt}(\dot{X}\vec{x}_0 + a\dot{\theta}_2\vec{y}_2)\right)_0 \\
\vec{\Gamma}_{G_2,2/0} &= \ddot{X}\vec{x}_0 + a(\ddot{\theta}_2\vec{y}_2 - \dot{\theta}_2^{\,2}\vec{x}_2)
\end{aligned}$$

Or $\ddot{\theta}_2 = 0$, d'où :

$$\vec{\Gamma}_{G_2,2/O} = \ddot{X}\vec{x}_0 - a\dot{\theta}_2^{\,2}\vec{x}_2$$

Q2)Le repère R_0 est supposé en translation uniforme par rapport au référentiel terrestre, on peut donc le supposer galiléen.
J'applique le théorème de la résultante dynamique au solide S_2 :

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{1\to 2} + \vec{P} &= m\vec{\Gamma}_{G_2,2/0} \\
\vec{F}_{1\to 2} + mg\vec{x}_0 &= m(\ddot{X}(t)\vec{x}_0 - a\dot{\theta}_2^{\,2}\vec{x}_2) \\
\vec{F}_{1\to 2} &= m(\ddot{X}(t) - g)\vec{x}_0 - ma\dot{\theta}_2^{\,2}\vec{x}_2
\end{aligned}$$

En notant m la masselotte 2, on a d'après le théorème des actions réciproques :

$$\vec{F}_{m/1} = m(g - \ddot{X})\vec{x}_0 + ma\dot{\theta}_2^{\,2}\vec{x}_2$$

Q3) Etant donné que les deux roues dentées possèdent le même rayon, elles tournent à la même vitesse dans des sens opposés, on a donc la relation :

$$\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}_3$$

Q4)La résultante des forces centrifuges est la somme des forces centrifuges appliquée à chaque masselotte :

$$\begin{aligned}\vec{F}^c_{m/1} &= \vec{F}^c_{2/1} + \vec{F}^c_{3/1} \\ \vec{F}^c_{m/1} &= ma\dot{\theta_2}^2\vec{x}_2 + ma\dot{\theta_3}^2\vec{x}_3\end{aligned}$$

Or d'après la question 3, on a $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}_3$, on obtient alors :

$$\vec{F}^c_{m/1} = ma\dot{\theta_2}^2(\vec{x}_2 + \vec{x}_3)$$

Q5)Pour que l'effort $\vec{F}^c_{m/1}$ reste vertical il faut que la composante selon $\vec{y}_1$ soit nulle :

$$\begin{aligned}\vec{x}_2 + \vec{x}_3 &= cos(\theta_2)\vec{x}_1 + sin(\theta_2)\vec{y}_1 + cos(\theta_3)\vec{x}_1 + sin(\theta_3)\vec{y}_1 \\ \vec{x}_2 + \vec{x}_3 &= (cos(\theta_2) + cos(\theta_3))\vec{x}_1 + (sin(\theta_2) + sin(\theta_3))\vec{y}_1\end{aligned}$$

Soit : $sin(\theta_2) + sin(\theta_3) = 0$

Q6) Pour respecter la condition de la question précédente, il faut que θ_3 et θ_2 soient en opposition de phase : $\theta_3 = \theta_2 \pm \pi$

Q7)

Q8) En positionnant les masselottes en opposition de phases, cela permet de limiter la résonance du système.

Q9)Le centre de gravité G_2 appartient à l'intersection des plans de symétrie, il est donc situé sur l'axe $(O_2, \vec{x}_2)$

Q10) Calcul du moment excentrique :

$$\begin{aligned}m_e &= 4ma \\ m_e &= \tfrac{16mR}{3\pi} \\ m_e &\approx 16kg.m\end{aligned}$$

Q11) Calcul de la force centrifuge maximale :

$$\begin{aligned} F_{max} &= m_e \Omega_{max}^2 \\ F_{max} &\approx 1.10^6 N \end{aligned}$$

Q12)Expression des vecteurs $\overrightarrow{O_O G}$ et $\overrightarrow{IJ_O}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_O G} &= X(t)\vec{x}_0 \\ \overrightarrow{IJ_O} &= (h - X - L)\vec{x}_0 \end{aligned}$$

Les efforts dus au ressort k_a et au ressort k_b valent :

$$\vec{F}_a = -k_a(X - l_a)\vec{x}_0 \quad et \quad \vec{F}_b = k_b(h - L - l_b - X)\vec{x}_0$$

Q13) J'applique le théorème de la résultante statique à l'ensemble V en projection sur $\vec{x}_0$:

$$-k_a(X - l_a) + k_b(h - L - l_b - X) + Mg + \rho A_p L g = 0$$

Q14) A l'équilibre statique on a $\Omega = 0$ soit $F_e(t) = 0$. En note X_s la position d'équilibre de V, l'équation obtenue précédemment devient :

$$(M + \rho A_p L)g - k_a(X_s - l_a) - k_b(L + X_s + l_b - h) = 0$$

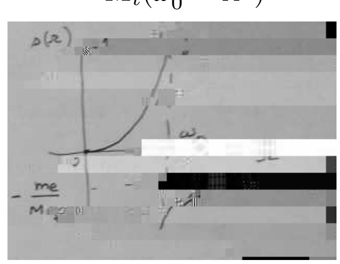
Q15) J'applique le théorème de la résultante dynamique à l'ensemble V en projection sur $\vec{x}_0$:

$$\begin{aligned} M_t\ddot{X} &= M_t g - k_a(X - l_a) + k_b(h - L - X - l_b) + F_e(t) \\ M_t\ddot{X} &= -k_a(X - X_s) - k_b(X - X_s) + F_e(t) \\ M_t\ddot{X} + (k_a + k_b)(X - X_s) &= F_e(t) \\ M_t\ddot{X}(t) + K_t(X - X_s) &= F_e(t) \end{aligned}$$

Q16) Condition particulière : $u(t) = s(\Omega)cos(\Omega t)$

$$\begin{aligned} (-\Omega^2 + \omega_0^2)s(\Omega) &= \frac{m_e}{M_t}\Omega^2 \\ s(\Omega) &= \frac{m_e \Omega^2}{M_t(\omega_0^2 - \Omega^2)} \end{aligned}$$

Q17)



Q18) Quand Ω augmente, sa valeur passe par ω_0 telle que $s(\omega_0) \to \infty$: résonance.
En général il y a des frottements. Solution technologique qui permettrait de limiter la résonance : utilisation de filtre ?

Q19)Crête à crête d'où le "2" : $A_{max} = 2\frac{m_e}{M} = \frac{2\times 16}{3210} = 10^{-2}m$

Q20) ? ?

Q21)

$$\rho A_p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,t) = 0$$
$$\frac{N(x,t)}{A_p} = \sigma(x,t) = E\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$N(x,t) = EA_p\frac{\partial u}{\partial x}$$

On remplace dans l'équation précédente et on obtient :

$$\rho A_p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - A_p E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$
$$c^2 = \frac{E}{\rho}$$

Q22) Considérons la masse M située au point G(x=0), les forces appliquées sont :
- le poids ;
- un seul effort normal $N(0,t) = EA_p\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(0,t)$
- la force de rappel du ressort a
- la force d'excitation $F_e(t)$

On applique le PFS et le PFD et on obtient bien la relation (3) :

$$M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0,t) - EA_p\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) + k_a u(0,t) = F_e cos(\Omega t)$$

Considérons l'extrémité I de masse nulle, les forces appliquées sont :
- un seul effort normal $-N(L,t) = EA_p\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(L,t)$
- la force de rappel du ressort b

La somme des forces est nulle, on obtient la relation (4) :

$$EA_p\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) + k_b(L,t) = 0$$

Q23)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(x)p\prime(t) = \varphi(x)\omega(-C\ \sin(\omega t) + D\ \cos(\omega t))$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2\varphi(x)p(t)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x)p(t) = \frac{\omega}{c}\left(-A\ \sin(\frac{\omega}{c}x) + B\ \cos(\frac{\omega}{c}x\right)p(t)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}\varphi(x)p(t)$$

Q24) On écrit rapidement : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = -w^2u(x,t) + w^2u(x,t) = 0.$

Q25) L'égalité (3) permet d'écrire que la quantité

$$M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0,t) - EA_p\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) + k_a u(0,t)$$

vaut :

$$M\left[-w^2 u(0,t)\right] - EA_p\left[\frac{BW}{C}\right]p(t) + k_a u(0,t),$$

c'est-à-dire :

$$-Mw^2 A\left(C\cos(wt) + D\sin(wt)\right) - \frac{EA_pBw}{c}\left(C\cos(wt) + D\sin(wt)\right) + \\ k_aA\left(C\cos(wt) + D\sin(wt)\right).$$

En regroupant, l'égalité

$$M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0,t) - EA_p\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) + k_a u(0,t) = 0$$

équivant à l'égalité :

$$\left[-Mw^2AC - \frac{EA_pBwC}{c} + k_aAC\right]\cos(wt) + \left[-Mw^2AD - \frac{EA_pBwD}{c} + k_aAD\right]\sin(wt) = 0.$$

Comme cette égalité est valable pour tout t, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \left[-Mw^2C + k_aC\right]A - \frac{EA_pwC}{c}B & = & 0 \\ \left[-Mw^2D + k_aD\right]A - \frac{EA_pwD}{c}B & = & 0 \end{array}\right. .$$

De même, l'égalité (4) permet d'écrire que la quantité

$$EA_p\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) + k_b u(L,t)$$

vaut :

$$EA_p\left[-\frac{Aw}{c}\sin\left(\frac{wL}{c}\right) + \frac{Bw}{c}\cos\left(\frac{wL}{c}\right)\right]p(t) + k_b\left[A\cos\left(\frac{wL}{c}\right) + B\sin\left(\frac{wL}{c}\right)\right]p(t).$$

Cette quantité est donc nulle. On remplace ensuite $p(t)$ par $C\cos(wt)+D\sin(wt)$. Et on regroupe sous la forme :

$$(4') \quad G_1\cos(wt) + G_2\sin(wt) = 0,$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{rcl} G_1 & = & \left(\frac{EA_pwBC}{c} + k_bCA\right)\cos\left(\frac{wL}{c}\right) + \left(-\frac{EA_pwAC}{c} + k_bCB\right)\sin\left(\frac{wL}{c}\right) \\ G_2 & = & \left(\frac{EA_pwBD}{c} + k_bDA\right)\cos\left(\frac{wL}{c}\right) + \left(-\frac{EA_pwAD}{c} + k_bBD\right)\sin\left(\frac{wL}{c}\right) \end{array}\right.$$

Comme $(4')$ est valable pour tout t, on a : $G_1 = G_2 = 0$, ce qui donne le nouveau système, d'inconnues A et B :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \left(-\frac{EA_pwC}{c}\sin\left(\frac{wL}{c}\right) + k_bC\cos\left(\frac{wL}{c}\right)\right)A + \left(\frac{EA_pwC}{c}\cos\left(\frac{wL}{c}\right) + k_bC\sin\left(\frac{wL}{c}\right)\right)B & = & 0 \\ \left(-\frac{EA_pwD}{c}\sin\left(\frac{wL}{c}\right) + k_bD\cos\left(\frac{wL}{c}\right)\right)A + \left(\frac{EA_pwD}{c}\cos\left(\frac{wL}{c}\right) + k_bD\sin\left(\frac{wL}{c}\right)\right)B & = & 0 \end{array}\right. .$$

En posant $\alpha = \dfrac{w}{c}L$, on a le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \left(-\frac{EA_pwC}{c}\sin\alpha + k_bC\cos\alpha\right)A + \left(\frac{EA_pwC}{c}\cos\alpha + k_bC\sin\alpha\right)B & = & 0 \\ \left(-\frac{EA_pwD}{c}\sin\alpha + k_bD\cos\alpha\right)A + \left(\frac{EA_pwD}{c}\cos\alpha + k_bD\sin\alpha\right)B & = & 0 \end{array}\right. .$$

Q26) On sait qu'un système linéaire homogène admet des solutions non nulles si et seulement si son déterminant est nul. C'est-à-dire si :

$$\begin{vmatrix} -200\alpha^2+2 & -20\alpha \\ \cos\alpha - 20\alpha\sin\alpha & \sin\alpha + 20\alpha\cos\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

En développant, cela donne :

$$-300\alpha^2\sin\alpha - 2000\alpha^3\cos\alpha + \sin\alpha + 30\alpha\cos\alpha = 0.$$

En posant $h(\alpha) = \alpha(30-2000\alpha^2)\cos\alpha + (1-300\alpha^2)\sin\alpha$, la condition est :

$$h(\alpha) = 0.$$

Q27) On remarque que $30-2000\alpha^2$ s'annule sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ pour $\alpha = \sqrt{\frac{3}{200}}$ et que $1-300\alpha^2$ s'annule sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ pour $\alpha = \sqrt{\frac{1}{300}}$. Puis $30-2000\alpha^2 < 0$ sur $\left]\sqrt{\frac{3}{200}},\frac{\pi}{2}\right]$ et $1-300\alpha^2 < 0$ sur $\left[\sqrt{\frac{1}{300}},\frac{\pi}{2}\right]$. Comme $\sqrt{\frac{1}{300}} < \sqrt{\frac{3}{200}}$ et comme $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ sont strictement positifs sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc sur $\left]\sqrt{\frac{3}{200}},\frac{\pi}{2}\right]$, on peut conclure que $h(\alpha) < 0$ pour $\alpha \in \left]\sqrt{\frac{3}{200}},\frac{\pi}{2}\right]$.

Enfin, comme la figure (a) montre que h ne s'annule pas sur $\left[0,\sqrt{\frac{1}{300}}\right]$ et est positive sur cet intervalle, h (étant continue) s'annule au moins une fois sur $\left[\sqrt{\frac{1}{300}},\sqrt{\frac{3}{200}}\right.$, intervalle strictement inclus dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Q28) La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est une combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Rapidement, on a pour tout α,

$$h'(\alpha) = (31-6300\alpha^2)\cos\alpha + \alpha(-630+2000\alpha^2)\sin\alpha.$$

Q29) Posons $J = \left[\sqrt{\frac{31}{6300}},\sqrt{\frac{3}{200}}\right]$. La quantité $31-6300\alpha^2$ s'annule pour $\alpha = \sqrt{\frac{31}{6300}}$ et est négative sur J. De même, la quantité $-630+2000\alpha^2$ s'annule pour $\alpha = \sqrt{\frac{630}{2000}} > \sqrt{\frac{3}{200}}$ et est négative sur J. Comme α, $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ sont positifs sur J, la quantité $h'(\alpha)$ est négative sur J. (Et même strictement négative sur l'intérieur de J.) Donc h est strictement décroissante sur J. Enfin, d'après l'énoncé, on sait que $h\left(\sqrt{\frac{31}{6300}}\right) > 0$ et que $h\left(\sqrt{\frac{3}{200}}\right) < 0$. Comme h est continue (car c'est une combinaison linéaire de fonctions continues), d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on peut conclure : J contient une et une seule racine de h.

Q30) Les inégalités (valables pour $\alpha \in I = \left[\sqrt{\frac{1}{300}},\sqrt{\frac{31}{6300}}\right]$) :

$$\alpha(30-2000\alpha^2)\cos\alpha > 1,1610 \text{ et } (1-300\alpha^2)\sin\alpha > -0,0334$$

permettent d'écrire :

$$\forall \alpha \in I,\ h(\alpha) = \alpha(30-2000\alpha^2)\cos\alpha + (1-300\alpha^2)\sin\alpha > 1,1610 - 0,0334 > 1.$$

Finalement, on sait déjà que h s'annule en $\alpha = 0$ et en $\alpha_1 \in J$ puis est strictement positive sur $]0, \alpha_1[$, et est strictement négative sur $\left]\alpha_1, \frac{\pi}{2}\right]$.

Q31) Au programme officiel, deux algorithmes sont possibles pour déterminer une solution approchée d'une racine de $h(\alpha) = 0$: l'algorithme de Dichotomie et l'algorithme de Newton. Pour faire un corrigé complet, proposons les deux.

Algorithme de Dichotomie

h est une fonction continue, posons n un entier supérieur ou égal à 2 fixé et $a = (2n-3)\pi/2$, $b = (n-1)\pi$. On sait qu'il existe un seul réel $\alpha_n \in [a, b]$ tel que $h(\alpha_n) = 0$. Le **principe de la dichotomie** consiste à obtenir une suite $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de segments emboîtés, dont la longueur tend vers 0 et contenant chacun la limite α_n. En notant g_p et d_p les bornes de ces intervalles, on dispose de deux suites adjacentes, convergeant vers α_n. Pour obtenir cette suite de segments emboîtés, on procède comme suit :

• on pose initialement $g_0 = min(a, b)$ et $d_0 = max(a, b)$;

• en supposant construit le segment $I_p = [g_p, d_p]$, on pose $m = \frac{g_p + d_p}{2}$ (milieu du segment) et on calcule $h(m)$: si $h(m)$ est du signe opposé à $h(g_p)$ alors il existe une racine entre g_p et m; on pose alors $I_{p+1} = [g_p, m]$, c'est-à-dire $g_{p+1} = g_p$ et $d_{p+1} = m$. Sinon, il y a une racine entre m et d_p, donc on pose $g_{p+1} = m$ et $d_{p+1} = d_p$.

Écrivons sous Python une fonction *dichotomie*$(h, a, b, epsilon)$ qui renvoie une valeur approchée à *epsilon* près de α_n. On suppose que a et b vérifient les conditions plus haut.

```
>>> def dichotomie(h,a,b,epsilon) :
        g, d = min(a,b), max(a,b)
        while d - g > 2*epsilon :
            m = (g+d)/2
            if h(m) == 0 :
                return m
            elif h(g) * h(m) < 0 :
                d = m
            else :
                g = m
        return (g+d)/2
```

On sort de la boucle *while* dès que $d - g <= 2 * epsilon$. Le milieu de $[g, d]$ est bien à une distance de α_n (qui appartient à ce segment) d'au plus *epsilon*.

Algorithme de Newton

La méthode de Newton consiste en la construction d'une suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$. Le premier terme x_0 est choisi « proche » de α_n, solution de $h(x) = 0$ sur $[a, b]$. On choisit souvent $x_0 = a$. La valeur x_{p+1} est l'intersection de la tangente à la courbe représentative de h au point d'abscisse x_p avec l'axe des x. Écrivons une fonction Python *newton*$(h, dh, a, epsilon)$ qui met en oeuvre cette méthode (dh est la fonction dérivée de h) et la précision ϵ sera considérée atteinte lorsque $|h(x_p)| \leqslant \epsilon$.

La tangente en M d'abscisse x_p a pour équation : $y = h(x_p) + h'(x_p)(x - x_p)$.

Rapidement, on a : $x_{p+1} = x_p - \dfrac{h(x_p)}{h'(x_p)}$. Il reste à passer en Python. On suppose avoir rentrer les fonctions h et dh.

```
>>> def newton(h,dh,a,epsilon) :
        x = a; p = 0; val = h(x)
        while abs(val) > epsilon :
            p+= 1; x = x - val / dh(x); val = h(x)
        print("nombre d'itérations nécessaires : ", p); return(x)
```

Q32) D'après plus haut, α_n vérifiant $h(\alpha_n) = 0$, l'ensemble des solutions (A_n, B_n) de (H) correspondant à $\alpha = \alpha_n$ peut se mettre sous la forme $\left(A_n, \left(-10\alpha_n + \dfrac{1}{10\alpha_n}\right) A_n\right)$, où $A_n \in \mathbb{R}$.

Si l'on fixe $A_n = 1$, on peut alors poser :

$$\phi_n(x) = \cos\left(\frac{\alpha_n x}{L}\right) + \left(-10\alpha_n + \frac{1}{10\alpha_n}\right)\sin\left(\frac{\alpha_n x}{L}\right).$$

Et donc (sachant que $L = 10$, d'après la donnée fournie page 8),

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= \cos\left(\frac{0.1161x}{10}\right) + \left(-10\times 0.1161 + \frac{8.616}{10}\right)\sin\left(\frac{0.1161x}{10}\right)\\ &= \cos(0.01161x) - 0.3\sin(0.01161x).\end{aligned}$$

Et de même,

$$\begin{aligned}\phi_2(x) &= \cos\left(\frac{1.6612x}{10}\right) + \left(-10\times 1.6612 + \frac{0.60196}{10}\right)\sin\left(\frac{1.6612x}{10}\right)\\ &= \cos(0.6612x) - 16.55\sin(0.01161x)\end{aligned}$$

On remarque que ϕ_1 est quasiment constant sur $[0, 10]$ (proche de 1) et par contre ϕ_2 « bouge » rapidement.

Remarque : les valeurs approchées données sont elles logiques, en égard aux valeurs numériques fournies page 8 ? On a $\rho = 7800$, $E = 2.1 \times 10^{11}$. Comme dans la question 21, on a vu que $c^2 = E/\rho$, ces valeurs donnent $c = 5188.75$. Si l'on remplace w par 60 dans $\alpha = wL/c$, on a $\alpha_1 = 0.1156$ (la valeur proposée dans l'énoncé est 0.1161), puis si l'on remplace w par 860 dans $\alpha = wL/c$, on a $\alpha_2 = 1.657$ (la valeur proposée dans l'énoncé est 1.6612), puis si l'on remplace w par 2500 dans $\alpha = wL/c$, on a $\alpha_3 = 4.818$ (la valeur proposée dans l'énoncé est 4.7440). Finalement, quel est l'intêret de mettre deux chiffres après la virgule vu l'imprécision ? (À part faire du calcul mental.)

Q33) Si le lâcher correspond au mode 1, $u(x,t) = \phi_1(x)p_1(t)$ et $u(x,t)$ est quasiment égal à $p_1(t) = C\cos(w_1 t) + D\sin(w_1 t)$. Le mouvement du profilé ne dépend que du temps t et quasiment pas de la distance x.
Si par contre, le lâcher correspond à un cumul des modes 1 et 2, $u(x,t) = \phi_1(x)p_1(t) + \phi_2(x)p_2(t)$ et $u(x,t)$ est une combinaison linéaire de cos et de sin de la variable x et de la variable t.

Q34) Montrons que la fonction $\langle .\,,\, .\rangle$ est un produit scalaire sur $C([0,L],\mathbb{R})$.

■ $\langle .\,,\, .\rangle$ est ***symétrique*** :
pour tout $(f,g) \in [C([0,L],\mathbb{R})]^2$,

$$\langle f\,,\, g\rangle = \frac{EA_p}{c^2}\int_0^L f(x)g(x)\,dx + Mf(0)g(0) = \frac{EA_p}{c^2}\int_0^L g(x)f(x)\,dx + Mg(0)f(0) = \langle g\,,\, f\rangle.$$

■ $\langle .\,,\, .\rangle$ est ***linéaire à gauche*** :
pour tout $(f,g,h) \in [C([0,L],\mathbb{R})]^3$ pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\langle f + ag\,,\, h\rangle = \frac{EA_p}{c^2}\int_0^L (f(x) + ag(x))h(x)\,dx + M(f(0) + ag(0))h(0) = \langle f\,,\, h\rangle + a\,\langle f\,,\, g\rangle.$$

La linéarité à droite découle de la linéarité à gauche et de la symétrie.

■ $\langle .\,,\, .\rangle$ est ***positive*** :
pour tout $f \in C([0,L],\mathbb{R})$,

$$\langle f\,,\, f\rangle = \frac{EA_p}{c^2}\int_0^L f(x)^2\,dx + Mf(0)^2 \geqslant 0.$$

■ $\langle .\,,\, .\rangle$ est ***définie*** :
pour tout $f \in C([0,L],\mathbb{R})$, l'égalité

$$\langle f\,,\,f\rangle = \frac{EA_p}{c^2}\int_0^L f(x)^2\,dx + Mf(0)^2 = 0$$

implique que f est nulle sur $[0, L]$ (car f est continue sur $[0, L]$).

Q35) La quantité $w_n^2 \int_0^L \phi_n(x)\phi_r(x)\,dx$ vaut :

$$w_n^2 \int_0^L \left[A_n \cos\left(\frac{w_n}{c}x\right) + B_n \sin\left(\frac{w_n}{c}x\right)\right]\left[A_r \cos\left(\frac{w_r}{c}x\right) + B_r \sin\left(\frac{w_r}{c}x\right)\right]\,dx.$$

Et la quantité $c^2 \int_0^L \phi_n''(x)\phi_r(x)\,dx$ vaut :

$$c^2 \int_0^L \left[-\frac{A_n w_n^2}{c^2} \cos\left(\frac{w_n}{c}x\right) - \frac{B_n w_n^2}{c^2} \sin\left(\frac{w_n}{c}x\right)\right]\left[A_r \cos\left(\frac{w_r}{c}x\right) + B_r \sin\left(\frac{w_r}{c}x\right)\right]\,dx.$$

En les ajoutant, on a bien :

$$w_n^2 \int_0^L \phi_n(x)\phi_r(x)\,dx + c^2 \int_0^L \phi_n''(x)\phi_r(x)\,dx = 0.$$

Q36) Le résultat analogue donné à la fin de la question 35 peut se mettre sous la forme :

$$\int_0^L \left[c^2\phi_n''(x)\phi_r(x) - c^2\phi_n(x)\phi_r''(x)\right]\,dx = \frac{c^2 M}{EA_p}(w_n^2 - w_r^2)\phi_n(0)\phi_r(0).$$

On a aussi le résultat de Q35 et la même égalité en permutant n et r :

$$\left\{\begin{array}{rcl} w_n^2 \int_0^L \phi_n(x)\phi_r(x)\,dx + c^2 \int_0^L \phi_n''(x)\phi_r(x)\,dx & = & 0 \\ w_r^2 \int_0^L \phi_n(x)\phi_r(x)\,dx + c^2 \int_0^L \phi_r''(x)\phi_n(x)\,dx & = & 0 \end{array}\right. .$$

En combinant :

$$-w_n^2 \int_0^L \phi_n(x)\phi_r(x)\,dx + w_r^2 \int_0^L \phi_n(x)\phi_r(x)\,dx = \frac{c^2 M}{EA_p}(w_n^2 - w_r^2)\phi_n(0)\phi_r(0).$$

On divise par $w_r^2 - w_n^2$, ce qui donne :

$$\int_0^L \phi_n(x)\phi_r(x)\,dx = \frac{-c^2 M}{EA}\phi_n(0)\phi_r(0).$$

C'est-à-dire : $\dfrac{EA_p}{c^2}\displaystyle\int_0^L \phi_n(x)\phi_r(x)\,dx + M\phi_n(0)\phi_r(0).$
C'est bien la relation (6) cherchée.

Q37) Partons de $I = \displaystyle\int_0^L \phi_r(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,dx$. Comme u est solution de (S), $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ pour tout (x,t) et donc : $I = \displaystyle\int_0^L c^2\phi_r(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,dx$. Effectuons alors une intégration par parties :

$$I = -c^2\int_0^L \phi_r'(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dx + c^2\left[\phi_r(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right]_{x=0}^{x=L}.$$

Ce qui donne :

$$I = -c^2 \int_0^L \phi_r'(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dx + c^2 \left[\phi_r(L) \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) - \phi_r(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) \right].$$

Ainsi la quantité $\int_0^L \phi_r(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,dx + c^2 \int_0^L \phi_r'(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dx$ vaut :

$$c^2 \left[\phi_r(L) \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) - \phi_r(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) \right].$$

Et la quantité $\frac{EA_p}{c^2} \left[\int_0^L \phi_r(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,dx + c^2 \int_0^L \phi_r'(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dx \right]$ vaut :

$$EA_p \left[\phi_r(L) \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) - \phi_r(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) \right].$$

Puis, on utilise les conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} EA_p \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) + k_b u(L,t) & = & 0 \\ M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0,t) - EA_p \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) + k_a u(0,t) & = & F_e \cos(\Omega t) \end{array} \right. .$$

Et finalement, la quantité $\frac{EA_p}{c^2} \left[\int_0^L \phi_r(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,dx + c^2 \int_0^L \phi_r'(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dx \right]$ vaut :

$$-\phi_r(L) k_b u(L,t) - \phi_r(0) \left[M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0,t) + k_a u(0,t) - F_e \cos(\Omega t) \right].$$

On en déduit la relation voulue.

Q 38) Partons de $u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(x) q_n(t) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(x) q_n''(t)$ et $u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(x) q_n(t) \Rightarrow$ $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n'(x) q_n(t)$, en supposant que le passage à la dérivée première et à la dérivée seconde sous le signe somme soit licite. Il reste à remplacer $u(x,t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$ par ces sommes dans l'égalité trouvée à la question Q37. Alors la quantité

$$\frac{EA_p}{c^2} \int_0^L \left[\phi_r(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,dx + c^2 \int_0^L \phi_r'(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dx \right]$$

(que l'on appelera SOM) est égale à :

$$\frac{EA_p}{c^2} \int_0^L \left[\phi_r(x) \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(x) q_n''(t)\,dx + c^2 \phi_r'(x) \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n'(x) q_n(t) \right] dx,$$

qui vaut donc :

$$-\phi_r(L) k_b \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(L) q_n(t) - \phi_r(0) \left[M \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(0) q_n'^{prime}(t) + k_a \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(0) q_n(t) - F_e \cos(\Omega t) \right].$$

On suppose que l'on puisse intervertir $\int$ et $\sum$. Alors SOM peut s'écrire :

$$\frac{EA_p}{c^2} \sum_{n=1}^{+\infty} q_n''(t) \int_0^L \phi_r(x) \phi_n(x)\,dx + EA_p \sum_{n=1}^{+\infty} q_n(t) \int_0^L \phi_r'(x) \phi_n'(x) q_n(t)\,dx.$$

Et SOM peut aussi s'écrire :

$$\sum_{n=1,n\neq r}^{+\infty} q_n''(t)\left[-M\phi_n(0)\phi_r(0)\right] + \frac{EA_p}{c^2}q_r''(t)\int_0^L \phi_r^2(x)\,dx$$
$$+\sum_{n=1,n\neq r}^{+\infty} q_n(t)\left[-k_a\phi_n(0)\phi_r(0) - k_b\phi_n(L)\phi_n(L)\right]$$
$$+EA_pq_r(t)\int_0^L \phi_r'(x)\,dx$$

Ainsi la relation de Q37) devient :

$$-\sum_{n=1,n\neq r}^{+\infty} q_n''(t)M\phi_n(0)\phi_r(0) - \sum_{n=1,n\neq r}^{+\infty} k_aq_n(t)\phi_n(0)\phi_r(0)$$
$$-\sum_{n=1,n\neq r}^{+\infty} k_bq_n(t)\phi_n(L)\phi_n(L) + \frac{EA_p}{c^2}q_r''(t)\int_0^L \phi_r^2(x)\,dx$$
$$+EA_pq_r(t)\int_0^L \phi_r'^2(x)\,dx + \sum_{n=1}^{+\infty} k_bq_n(t)\phi_n(L)\phi_n(L) + \sum_{n=1}^{+\infty} q_n''(t)M\phi_n(0)\phi_r(0)$$
$$+\sum_{n=1}^{+\infty} k_aq_n(t)\phi_n(0)\phi_r(0) = \phi_r(0)F_e\cos(\Omega t)$$

Soit encore :

$$\left[\frac{EA_p}{c^2}\int_0^L \phi_r^2(x)\,dx\right]q_r''(t) + \left[EA_p\int_0^L \phi_r'^2(x)\,dx\right]q_r(t)$$
$$+k_a^2\phi_r^2(0)q_r(t) + k_b\phi_r^2(t)(L) + \phi_r^2(0)q''(t)M$$
$$= \phi_r(0)F_e\cos(\Omega t)$$

Il suffit de poser :

$$\left\{\begin{array}{lcl} K_n & = & E_{An}\int_0^L \phi_n^2(x)\,dx + k_a^2\phi_n^2(0) + k_b\phi_n^2(t)(L) \\ M_n & = & \frac{EA_p}{c^2}\int_0^L \phi_n^2(x)\,dx \\ F_n & = & \phi_r(0)F_e \end{array}\right. .$$

Q39) Montrons la convergence absolue de la série $\sum_n f_n(x)$. Le type de convergence voulue n'est pas indiquée (on peut montrer la convergence normale de $\sum_n f_n(x)$ donc la convergence absolue car l'inégalité $|f_n(x_0)| \leqslant \dfrac{6L^2}{Mc^2\alpha_{n-3}^3}$ est valable pour tout $x_0 \in [0, L]$). Le souci c'est que la convergence normale n'est pas au programme en 2TSI. Et l'étude de la convergence d'une série de fonction, de façon générale, aussi. Nous allons donc poser $x = x_0$ fixé et montrer seulement la convergence absolue donc la convergence simple. Il suffit de remarquer que $\alpha_{n-3} \in [(2(n-3)-3)\pi/2,\ (n-3-1)\pi] = [(2n-9)\pi/2,\ (n-4)\pi]$ et donc pour tout $n \geqslant 5$,

$$|f_n(x_0)| \leqslant \frac{6L^2}{Mc^2\alpha_{n-3}^3} \leqslant \frac{48L^2}{Mc^2(2n-9)^3\pi^3}.$$

Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n^3}$ est convergente pour $n \geqslant 5$, il en est de même de la série de terme général $|f_n(x_0)|$ pour tout $x_0 \in [0, L]$ fixé.

Q40) On a : $\bar{u}(x) = ax + b$ et donc $\dfrac{d\bar{u}}{dx} = a$. Ce qui donne le système :

$$\begin{cases} -EA_p a + k_a b & = & F_e \\ EA_p a + k_b(aL + b) & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -EA_p a + k_a b & = & F_e \\ (EA_p + k_b L)a + k_b b & = & 0 \end{cases}.$$

On résout ce système :

$$a = \frac{\begin{vmatrix} F_e & k_a \\ 0 & k_b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -EA_p & k_a \\ EA_p + k_b L & k_b \end{vmatrix}} = \frac{-F_e k_b}{EA_p k_b + k_a EA_p + k_a k_b L}.$$

Or, $\frac{k_a}{k_b} = 2$ et $a = \dfrac{-Fe}{3EA_p + k_a L}$. Puis $EA_p = \dfrac{MC^2}{10L}$ et $k_a = \dfrac{MC^2}{100L^2}$. Ainsi :

$$a = \frac{-F_e}{\dfrac{3MC^2}{10L} + \dfrac{MC^2}{100L}} = \frac{-100LFe}{31MC^2}.$$

On passe à b :

$$b = \frac{\begin{vmatrix} -EA_p & F_e \\ EA_p + k_b L & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -EA_p & k_a \\ EA_p + k_b L & k_b \end{vmatrix}} = \frac{F_e\,[EA_p + k_b L]}{EA_p k_b + k_a EA_p + k_a k_b L}.$$

Ce qui donne, après un procédé similaire à a :

$$b = \frac{2100L^2 Fe}{31MC^2}.$$

Q41) On a : $u(x,t) = [f_1(x) + f_2(x)]\,F_e\cos(\Omega t) + \displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\phi_n(x)}{M_n W_n^2} F_e \cos(\Omega t)$.

Donc : $res(x) = \displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\phi_n(x)}{M_n W_n^2} = \bar{u}(x) - \frac{\phi_1(x)}{K_1} F_e - \frac{\phi_2(x)}{K_2} F_e$.

Et $res(x) = ax + b - \dfrac{\phi_1(x)}{K_1} F_e - \dfrac{\phi_2(x)}{K_2} F_e$.

Avec les conditions numériques de l'énoncé : $L = 10$, $F_e = 10^3$, $M = 3210$, $c^2 = 2.7 \times 10^7$, $EA_p = 8.63 \times 10^8$, $k_a = 8.67 \times 10^6$, $k_b = 4.33 \times 10^6$, on trouve $a = -4 \times 10^{-7}$ et $b = 0.84 \times 10^{-4}$.

On retrouve : $-4.0 \times 10^{-10}(x - 210) = \dfrac{a}{F_e} x + \dfrac{b}{F_e}$.

Puis $M_1 = 3290$, $M_2 = 43500$, $w_1 = 60$ et $W_2 = 860$ donc :

$$f_1(x) = \frac{\phi_1(x)}{M_1(W_1^2 - \Omega^2)} = \frac{\phi_1(x)}{3290(60^2 - \Omega^2)} \text{ et } f_2(x) = \frac{\phi_2(x)}{M_2(W_2^2 - \Omega^2)} = \frac{\phi_2(x)}{43500(860^2 - \Omega^2)}.$$

Puis $K_1 = M_1 W_1^2 = 3290 \times 3600 = 1.2 \times 10^4$ et $K_2 = M_2 W_2^2 = 43500 \times 739600 = 3.2 \times 10^7$.

Cela donne : $\dfrac{\phi_1(x)}{K_1 F_e} = \dfrac{\phi_1(x)}{1.2 \times 10^7}$ et $\dfrac{\phi_2(x)}{K_2 F_e} = \dfrac{\phi_2(x)}{3.2 \times 10^{10}}$.

On retrouve les mêmes résultats à condition de prendre a/F_e à la place de a et b/F_e à la place de b.