2TSI-MATHÉMATIQUES

A rendre le jeudi 13 septembre 2018 au plus tard

Les différents exercices sont indépendants.

Exercice d'informatique

On utilisera Python pour établir les fonctions.

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 9 \\ \forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+1} = 4u_n^3 + 3u_n^4. \end{cases}.$$

1. Écrire une fonction U telle que $U(n)$ renvoie u_n. Calculer avec Python u_i de $i = 0$ à $i = 5$.
2. Écrire une fonction S telle que $S(n)$ renvoie $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
   Calculer avec Python les quantités $S(1)$, $S(2)$ et $S(4)$.
3. Écrire une fonction C telle que $C(n)$ renvoie le nombre de 9 par lesquels se termine l'écriture en base 10 de u_n.

Indications : À la question 1, on peut proposer dans la solution une version récursive et une version itérative. À vous de choisir celle que vous voulez. À la question 2, le partisan du moindre effort utilisera la fonction prédéfinie *sum*. ***À la question 3, l'idée est qu'un nombre*** v ***qui se termine par*** 9 ***est tel que*** $v\%10$ ***vaille*** 9. ***Donc on initialise le nombre*** i ***de*** 9 ***dans*** $U(n)$ ***à*** 0 ***et on fait une boucle*** *while* ***dans laquelle on rajoute*** 1 ***à*** i ***à chaque étape.***

Exercice 02

On considère l'équation suivante (E), d'inconnue $z \in \mathbf{C}$:

$$z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z - 5 = 0.$$

1. Déterminer les solutions réelles et imaginaires pures de (E).
2. Effectuer la division euclidienne de :
   $$P = X^4 - 4(1+i)X^3 + 12iX^2 + 8(1-i)X - 5 \text{ par } Q = X^2 - (1+i)X + i.$$
3. Résoudre (E).

T.S.V.P →

Problème type QCM

Par question, deux réponses au maximum sont vraies et comme il s'agit d'un devoir à la maison, rédigez les réponses en expliquant pourquoi telle assertion est juste ou pourquoi telle assertion est fausse.

Questions liées : *Questions 1 à 3, questions 4 à 6.*

PARTIE I

Soit $z = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. ***On pose*** $\alpha = z + z^4$ ***et*** $\beta = z^2 + z^3$.

Question 01 : On montre que

a) $\alpha + \beta = 1$. **b)** $\alpha + \beta = -1$. **c)** $\alpha\beta = 1$. **d)** $\alpha\beta = -1$.

Question 02 : Les nombres α et β sont les racines du trinôme du second degré

a) $X^2 + X - 1$. **b)** $X^2 - X - 1$. **c)** $X^2 + X + 1$. **d)** $X^2 - X + 1$.

Question 03 : On déduit des résultats précédents

a) $\cos \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $\sin \dfrac{2\pi}{5} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

b) $\cos \dfrac{4\pi}{5} = \dfrac{-\sqrt{5}-1}{4}$ et $\sin \dfrac{4\pi}{5} = \dfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

c) $\cos \dfrac{6\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\sin \dfrac{6\pi}{5} = \dfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

d) $\cos \dfrac{8\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\sin \dfrac{8\pi}{5} = \dfrac{-1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

PARTIE II

Soient $n \in \mathbf{N} \setminus \{0,1\}$ ***et*** $\{\omega_0, ..., \omega_{n-1}\}$ ***les racines*** $n^{\text{èmes}}$ ***de l'unité :***

$$\omega_k = \omega^k, \text{ \textit{avec} } \omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}.$$

Soit $p \in \mathbf{N}$. ***La notation*** $\binom{n}{k}$ ***désigne le coefficient binomial*** $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Question 04 : On établit que

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p = \frac{1+\omega^{np}}{1-\omega^p}$ si $\omega^p \neq 1$.. **b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p = \frac{1-\omega^{np}}{1-\omega^p}$ si $\omega^p \neq 1$..

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p = n$ si $\omega^p = 1$.. **d)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p = 1$ si $\omega^p = 1$.

Question 05 : Un calcul permet d'obtenir

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\omega_k = 2^n \cos^n \frac{\pi}{n} - 1$. **b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\omega_k = -2^n \cos^n \frac{\pi}{n} + 1$.

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\omega_k = 2^n \cos^n \frac{\pi}{n} + 1$. **d)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\omega_k = -2^n \cos^n \frac{\pi}{n} - 1$.

Question 06 : Le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \omega_k$ vaut

a) $(-1)^n$. **b)** $(-1)^{n-1}$. **c)** $(-1)^{n-1}\omega$. **d)** $(-1)^n\omega$.