Devoir surveillé N°02

2TSI-MATHÉMATIQUES

Samedi 10 Novembre 2018

Les différents exercices sont indépendants.

Exercice 01

D'après le Concours National Commun Marocain

Le but de l'exercice est la résolution de l'équation $X^2 + 3X = A$, *où* $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

1. Justifier que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. On note λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres de A et on suppose que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$; préciser les valeurs de λ_1, λ_2 et λ_3.
2. $\forall\, k \in [\![1, 3]\!]$, déterminer le vecteur propre e_k de $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ (canoniquement associé à A) associé à la valeur propre λ_k et ayant pour composantes des nombres entiers dont l'un est égal à 1.
3. Justifier que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbf{R}^3$ et écrire la matrice Δ de u, relativement à cette base.
4. Déterminer une matrice $P \in GL_3(\mathbf{R})$ telle que $A = P\Delta P^{-1}$ puis calculer P^{-1}.
5. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ une matrice vérifiant $B^2 + 3B = A$, on note v l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à B.
   (a) Justifier que $v^2 + 3v = u$.
   (b) Vérifier que $u\, o\, v = v\, o\, u$ et en déduire que $\forall k \in \{1, 2, 3\}$, le vecteur $v(e_k)$ est colinéaire à e_k. Conclure que la matrice V de v relativement à (e_1, e_2, e_3) est diagonale.
   (c) On pose $V = \mathrm{Diag}\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Exprimer Δ en fonction de V puis déterminer les valeurs possibles de α_1, α_2 et α_3 ainsi que celles de la matrice V.
6. Combien de solutions l'équation $X^2 + 3X = A$ admet-t-elle dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$?

Exercice 02

Définition de la trace servie avec quelques propriétés...

Pour toute matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on appelle trace de A et on note $\mathrm{Tr}(A)$ la somme des coefficients de la diagonale principale de A, on a donc $\mathrm{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

1. Calculer la trace de I_n pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$.
2. Montrer que l'application $\mathrm{Tr}\ : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}$, $A \mapsto \mathrm{Tr}(A)$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dans $\mathbf{K}$.
3. Montrer que pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. (On détaillera les calculs.)
4. Soit ϕ un endomorphisme de $\mathbf{K}^n$, et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbf{K}^n$, montrer que les matrices $M_{\mathcal{B}}(\phi)$ et $M_{\mathcal{B}'}(\phi)$ ont la même trace. On note $\mathrm{Tr}(\phi)$ cette valeur commune.
5. Montrer qu'il n'existe aucun couple $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{C}))^2$ tel que l'on ait
$$AB - BA = I_n.$$

Exercice 03

Magiques, ces matrices !

Toutes les matrices dans cet exercice sont dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{K})$, où $\mathbf{K}$ est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On considère par ailleurs les matrices carrées d'ordre 3 , $(a_{i,j})$ telles que les huit sommes :

$$a_{i,1}+a_{i,2}+a_{i,3},\ a_{1,j}+a_{2,j}+a_{3,j},\ a_{1,1}+a_{2,2}+a_{3,3}, a_{3,1}+a_{2,2}+a_{1,3}$$

soient égales (pour les trois valeurs possibles de i et de j). On appelle matrices magiques de telles matrices. De plus, on considère les quatre matrices

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ B=A^T,\ C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que A, B, C et F sont magiques et que $-2F=A+B$.
2. Soit $M\in\mathcal{M}_3(\mathbf{K})$, montrer que $\dfrac{1}{2}(M^T+M)$ est symétrique et que $\dfrac{1}{2}(M^T-M)$ est antisymétrique.
3. Montrer qu'une matrice M quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbf{K})$ est la somme d'une matrice symétrique M' et d'une matrice antisymétrique M'' et que cette décomposition est unique.
4. Montrer que la somme de deux matrices magiques, que la transposée d'une matrice magique, que le produit d'une matrice magique par un scalaire sont des matrices magiques. Montrer que si M est magique, la matrice symétrique M' associée et la matrice antisymétrique M'' associée sont magiques.
5. Justifier que toute matrice antisymétrique M peut s'écrire sous la forme $M=\begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$, où α, β et γ sont trois scalaires donnés. Construire alors toutes les matrices magiques qui soient antisymétriques (on pourra exprimer le résultat en fonction de $A+F$).
6. Construire toutes les matrices magiques symétriques.

   Eine kleine Anweisung (une petite indication) : pour la question 6, on pourra commencer par trouver les matrices magiques symétriques de trace nulle (voir ou revoir la définition de la trace) puis passer au cas général et montrer que les solutions sont des combinaisons linéaires des matrices F et C. Jetzt, zur Arbeit !
7. Montrer que l'ensemble des matrices magiques forme un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$. Donner sa dimension. Montrer que $\{A, B, C\}$ en est une base.

Exercice 04

Tiré de CCP TSI 2012

Soit n un entier naturel ou égal à 3.
Soit $\mathbf{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On définit l'application ϕ, qui à un polynôme P de $\mathbf{R}_n[X]$ associe : $\phi(P)=(X+2)P-XP(X+1)$.
Par exemple, $\phi(X)=(X+2)X-X(X+1)=X$.

1. Vérifier que $\phi(X^3)=-X-3X^2-X^3$ et $\phi(1)=2$.
2. Montrer que ϕ est linéaire.
3. Déterminer le degré et le coefficient dominant de $\phi(X^k)$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$.
4. En déduire que ϕ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.
5. Dans cette question, on considère le cas $n=3$.
   On note M la matrice de ϕ dans la base canonique $\mathcal{B}=\{1, X, X^2, X^3\}$ de $\mathbf{R}_3[X]$ et Q le polynôme caractéristique de ϕ, c'est-à-dire $Q(X)=\mathsf{Det}\,(XI_4-M)$, où I_4 désigne la matrice unité carrée d'ordre 4.
   (a) Vérifier que $M=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (b) Calculer Q. Quelles sont les valeurs propres de ϕ ?
   (c) ϕ est-il diagonalisable ? Déterminer les sous-espaces propres de ϕ.