Devoir surveillé N°01

2TSI-MATHÉMATIQUES

Samedi 15 septembre 2018

Les différents exercices sont indépendants.

EXERCICE 01

Soit t ***un paramètre réel***, on considère dans tout le problème l'équation (d'inconnue Z) :

$$(1) \quad Z^2 - 2(1 + 2\cos t + 2i\sin t)Z - 3 = 0.$$

De même, on définit l'équation (d'inconnue Z) :

$$(2) \quad Z^2 - 2(1 + 2\cos t - 2i\sin t)Z - 3 = 0.$$

1. Déterminer les solutions de (1) :
   (a) dans le cas où $t = 0$.
   (b) dans le cas où $t = \pi$.
2. On veut déterminer les valeurs de t pour lesquelles les solutions de (1) sont réelles.
   (a) Vérifier que si Z est solution de (1), $\bar{Z}$ est solution de (2).
   (b) Montrer que si Z est solution réelle de (1) alors Z est aussi solution de (2).
   (c) En déduire que si Z est solution réelle de (1) alors $\sin t = 0$ nécessairement.
   (d) On suppose $t = k\pi$, où k est un entier relatif. Calculer les solutions de (1) en fonction de k et vérifier qu'elles sont toutes réelles. Sont-elles toujours distinctes ?

On revient au cas général. Dans la suite du problème on note Z' ***et*** Z'' ***les solutions (éventuellement non réelles de*** (1).

3. On appelle P ***le point d'affixe*** $\frac{1}{2}(Z' + Z'')$.
   (a) Soit l'équation $aZ^2 + bZ + c = 0$, à coefficients a, b et c complexes avec $a \neq 0$. Démontrer que si Z_1 et Z_2 sont les deux solutions complexes (et non nécessairement distinctes) de cette équation, alors :
   $$Z_1 + Z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } Z_1 Z_2 = \frac{c}{a}.$$
   (b) Démontrer alors sans calculer explicitement Z' et Z'' que P a pour affixe $1 + 2\cos t + 2i\sin t$.
   (c) En déduire que P décrit un cercle suivant les valeurs de t. On donnera le centre et le rayon de ce cercle.
4. ***On note*** Δ ***le discriminant de*** (1).
   (a) Exprimer Δ sous forme d'un produit d'un réel et de l'exponentielle d'un nombre imaginaire pur.
   (b) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles $Z' = Z''$.
   (c) On suppose ici $1 + 2\cos t > 0$. Déterminer les complexes z tels que $z^2 = \Delta$.
   En déduire les expressions de Z' et de Z''.
   (d) Reprendre la question précédente avec $1 + 2\cos t < 0$.

T.S.V.P →

5. On pose dans cette question $Y' = Z' - 3$ et $Y'' = Z'' - 3$.
   (a) Montrer que si $1 + 2\cos t > 0$ alors Y' et Y'' ont le même module.
   (b) ***On suppose maintenant que*** $1 + 2\cos t < 0$.
      i. Montrer que l'on peut écrire Y' et Y'' sous la forme
      $$2e^{i\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}A(t) \text{ et } 2e^{i\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}B(t),$$
      où $A(t) = 2\sin\dfrac{t}{2} + \sqrt{-1-2\cos t}$ et $B(t) = 2\sin\dfrac{t}{2} - \sqrt{-1-2\cos t}$.
      ii. Montrer que le produit $A(t)B(t)$ vaut 3.
      iii. Conclure que Y' et Y'' ont le même argument.

EXERCICE 02

1. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P_1 = X^4 - i$.
2. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P_2 = X^4 + 2X^2 - 3$.

EXERCICE 03

Soit f l'application de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{C}$, qui à z associe $\dfrac{z+1}{z-1}$.

1. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $f(z)$ soit réel.
2. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.