Devoir libre N°03

2TSI-MATHÉMATIQUES

A rendre le jeudi 29 Novembre 2018 au plus tard

Les différents exercices sont indépendants.

Exercice d'informatique

Inspiré de E3A 2018. On utilisera Python pour établir les fonctions.

1. Proposer une fonction python `maxi` prenant en argument une liste d'entiers naturels `L` et renvoyant le maximum des entiers de cette liste.
   On n'utilisera pas de fonction spécifique de Python déterminant ce maximum.
2. Écrire une fonction `ind` prenant en argument une liste d'entiers naturels `L` et renvoyant la liste des indices `[i_1,...,i_r]` avec `i_1<...<i_r` telle que pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, `L[i_k]` soit non nul.
   Par exemple si `L = [0,1,3,0,7]`, alors `ind(L)` renvoie `[1,2,4]`.
3. Écrire une fonction `nb_oc` prenant comme argument une liste d'entiers naturels `L` et renvoyant la liste `T` de longueur `M = maxi(L)+1` où, pour tout $i \in [\![0, M]\!]$, `T[i]` est le nombre d'occurrences de l'entier `i` dans la liste `L`.
   Par exemple, si `L = [3,1,4,1,5]`, alors `T = [0,2,0,1,1,1]`.
   On pourra utiliser la fonction `maxi`.
4. Soit `L` une liste d'entiers naturels.
   (a) Déterminer le nombre de fois, noté `n`, où la liste `L` est parcourue lors de l'exécution de `nb_oc(L)`.
   (b) On veut que ce nombre `n` soit indépendant de `M = maxi(L)+1`.
   Si ce n'est pas le cas, modifier la fonction `nb_oc` afin de respecter cette condition.

Exercice 02

Inspiré de E3A 2018

On rappelle que pour deux entiers naturels r et ℓ, $\binom{r}{\ell}$ désigne le nombre de parties à ℓ éléments d'un ensemble à r éléments.

Soient n un entier naturel non nul et X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et prenant leurs valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2, \quad \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \alpha \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}$$

1. Montrer de deux manières différentes que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
2. Déterminer la valeur du réel α.
3. Donner les lois des variables aléatoires X et Y. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?
4. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Z = X - 1$. Donner alors l'espérance et la variance de X.
5. Soient p, q et r trois entiers naturels et A un ensemble fini de cardinal $p+q$.
   En **dénombrant de deux façons différentes** les parties de A de cardinal r, montrer que :
   $$\sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k}\binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r}$$
   On pourra remarquer que $k + (r-k) = r$ et s'aider d'un schéma illustrant cette situation.

T.S.V.P →

6. En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
7. On note $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{R})$ la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est
$$b_{i,j} = \mathbb{P}([(X,Y) = (i,j)]).$$
   (a) Déterminer le rang de la matrice B.
   (b) Déterminer la valeur de $\mathrm{Tr}(B)$, la trace de la matrice B.

Exercice 03

D'après CCS TSI

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par
$$u_0 = 0,\ u_1 = -1,\ u_2 = 3$$
et la relation :
$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+3} = -2u_n + u_{n+1} + 2u_{n+2}.$$

1. On pose
$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}.$$
Déterminer une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$.
2. Réduire A dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On déterminera une matrice de passage P correspondante.
On pose $Y_n = P^{-1}X_n$.
3. Déterminer Y_0 puis ensuite Y_n en fonction de n.
4. En déduire X_n puis u_n en fonction de n.