

Partie I - Deux fonctions

Q1. $1-t^2=(1+t)(1-t)$ ainsi $1-t^2=0 \Leftrightarrow t \in [-1; 1]$ donc f et g sont définies sur $]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$.

Q2. $f(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^2}{1-(\sqrt{3})^2} = \frac{3}{1-3} = -\frac{3}{2}$

$g(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^3}{1-(\sqrt{3})^2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Q3. Le domaine de définition de f et de g est centré par rapport à 0.

$\forall t \in]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$, $-t \in]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$ et

$f(-t) = \frac{(-t)^2}{1-(-t)^2} = \frac{t^2}{1-t^2} = f(t)$

$g(-t) = \frac{(-t)^3}{1-(-t)^2} = -\frac{t^3}{1-t^2} = -g(t)$

Ainsi f est une fonction paire et g une fonction impaire.

$M(-t)$ a pour coordonnées $(f(t); -g(t))$ donc $M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Q4. $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^2}{-t^2} = -1$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -1$

et $g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^3}{-t^2} = -t$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = -\infty$

Q5. La fonction carrée est continue en 1 ainsi, $\lim_{t \rightarrow 1^-} t^2 = \lim_{t \rightarrow 1^+} t^2 = 1$

$1-t^2 < 0 \Leftrightarrow t \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ ainsi $\lim_{t \rightarrow 1^-} 1-t^2 = 1-t^2 = 0^+$ donc $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = +\infty$
 $\lim_{t \rightarrow 1^+} 1-t^2 = 1-t^2 = 0^-$ donc $\lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = -\infty$

De même $\lim_{t \rightarrow 1^-} t^3 = \lim_{t \rightarrow 1^+} t^3 = 1$ donc $\lim_{t \rightarrow 1^-} g(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow 1^+} g(t) = -\infty$

Q6. Les fonctions f et g sont des fractions rationnelles, elles sont donc dérivables sur leur ensemble de définition contenant $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

$\forall t \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$, $f'(t) = \frac{2t(1-t^2) - t^2 \times (-2t)}{(1-t^2)^2} = \frac{2t - 2t^3 + 2t^3}{(1-t^2)^2} = \frac{2t}{(1-t^2)^2}$

$g'(t) = \frac{3t^2(1-t^2) - t^3 \times (-2t)}{(1-t^2)^2} = \frac{3t^2 - 3t^4 + 2t^4}{(1-t^2)^2} = \frac{3t^2 - t^4}{(1-t^2)^2} = \frac{t^2(3-t^2)}{(1-t^2)^2}$

Q7. $\forall t \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$, $\left. \begin{matrix} 2t > 0 \\ (1-t^2)^2 > 0 \end{matrix} \right\}$ donc $f'(t) > 0$

$\left. \begin{matrix} t^2 > 0 \\ (1-t^2)^2 > 0 \end{matrix} \right\}$ donc $g'(t)$ est du signe de $(3-t^2)$ (négatif à l'extérieur des racines)

t	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	
signe de f'	0	+	+	+	
f	0	$\nearrow +\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\searrow -1$	
g	0	$\nearrow +\infty$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow -\infty$	
signe de $g'(t)$	0	+	+	0	-
$(3-t^2)$		+	+	0	-

Partie II - Tangente à l'origine et au point $M(\sqrt{3})$.

Q8. $\frac{1}{1-u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + u + o(u)$

Q9. $f(t) = t^2 \frac{1}{1-t^2} \underset{t \rightarrow 0}{=} t^2(1+t^2+o(t^2)) \underset{t \rightarrow 0}{=} t^2+t^4+o(t^4) \underset{t \rightarrow 0}{=} t^2+o(t^3)$

$g(t) = t^3 \frac{1}{1-t^2} \underset{t \rightarrow 0}{=} t^3(1+t^2+o(t^2)) \underset{t \rightarrow 0}{=} t^3+t^5+o(t^5) \underset{t \rightarrow 0}{=} t^3+o(t^3)$

Q10. La fonction f étant une fraction rationnelle définie sur $]-1; 1[$, f est de classe C^2 sur $]-1; 1[$, ainsi la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 donne :

$f(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2}t^2 + o(t^2)$

Par unicité du développement limité en 0 on a : $\frac{f''(0)}{2} = 1$ donc $f''(0) = 2$

Le même raisonnement appliqué à g donne $\frac{g''(0)}{2} = 0$ donc $g''(0) = 0$

Q11. $\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = 0 \\ t^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0$

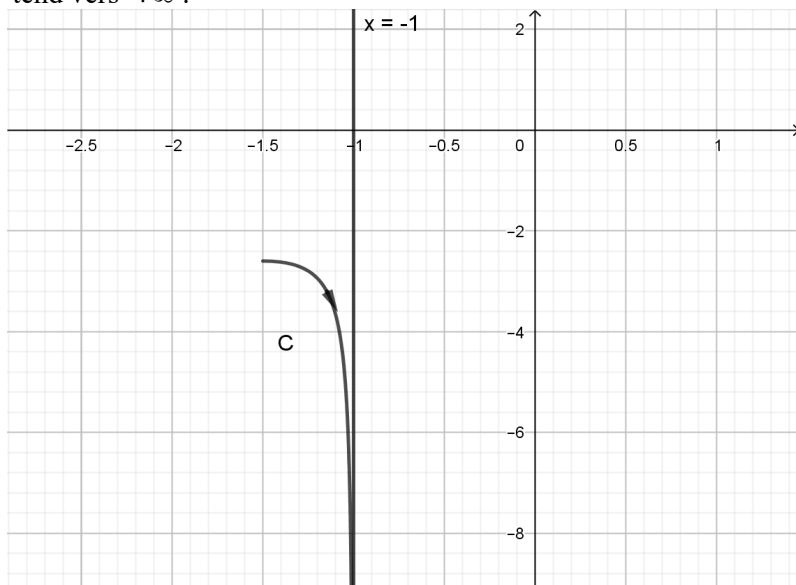
La courbe C passe par l'origine du repère uniquement pour $t = 0$.

Or $\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} \underset{t \rightarrow 0}{=} t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + o(t^2)$ donc la courbe C admet à l'origine du repère une demi-tangente dirigée par le vecteur \vec{i} .

Q.12 Le point $M(\sqrt{3})$ est un point régulier de C ainsi le vecteur de coordonnées $(f'(\sqrt{3}); g'(\sqrt{3}))$ est tangent à C au point $M(\sqrt{3})$. D'après les tableaux de signes des dérivées précédents, $f'(\sqrt{3}) > 0$ et $g'(\sqrt{3}) = 0$ ainsi le vecteur \vec{i} est tangent à C au point $M(\sqrt{3})$.

Partie III - Asymptotes

Q13. La droite d'équation $x = -1$ est asymptote à C au voisinage de $t = +\infty$.
 D'après le tableau de variations de f , $f(t)$ tend vers -1 par valeurs inférieures à -1 lorsque t tend vers $+\infty$, ainsi C est située à gauche de la droite d'équation $x = -1$ pour t au voisinage de $+\infty$.
 De plus, le tableau de variations de g , indique que la courbe C se dirige vers le bas lorsque t tend vers $+\infty$.



Q14. $N(t)$ étant le point de D d'abscisse $f(t)$ on a : $y_{N(t)} = f(t) - \frac{1}{2}$

Q15. Soit $\Delta = 1^2 - 4(-2)1 = 9$,
 les racines de P sont $t_1 = \frac{-1+3}{-4} = -\frac{1}{2}$ et $t_2 = \frac{-1-3}{-4} = 1$

Ainsi, $P(t) = -2\left(t + \frac{1}{2}\right)(t-1)$

Q16. $\forall t \in [0; 1[\cup]1; +\infty[$, $\delta(t) = \frac{2t^3}{2(1-t^2)} - \frac{2t^2}{2(1-t^2)} + \frac{1-t^2}{2(1-t^2)} = \frac{2t^3 - 3t^2 + 1}{2(1-t^2)}$

$$\delta(t) = \frac{(t-1)(2t^2 - t - 1)}{2(1-t)(1+t)} = -\frac{2t^2 - t - 1}{2(1+t)} = \frac{P(t)}{2(t+1)}$$

Q17. Au voisinage de 1, $t+1 > 0$ donc $\delta(t)$ est du signe de $P(t)$. Or au voisinage de 1, $t + \frac{1}{2} > 0$ ainsi $P(t)$ est du signe de $-2(t-1)$: $\delta(t) > 0$ à gauche de 1 et $\delta < 0$ à droite de 1.

Q18. $\forall t \in [0; 1[\cup]1; +\infty[$, $g(t) - y_{N(t)} = g(t) - \left(f(t) - \frac{1}{2}\right) = \delta(t) = \frac{P(t)}{2(t+1)}$

Ainsi, par continuité de P en 1, $\lim_{t \rightarrow 1} g(t) - y_{N(t)} = 0$ donc la droite D est asymptote à la

courbe C au voisinage de 1.

Plus précisément, pour t tendant vers 1 par valeurs inférieures à 1 :

► f est croissante sur $[0; \sqrt{3}]$ donc la courbe C est dirigée vers la droite et $\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} f(t) = +\infty$ donc la courbe C admet des abscisses arbitrairement grandes c'est-à-dire

« infiniment à droite »

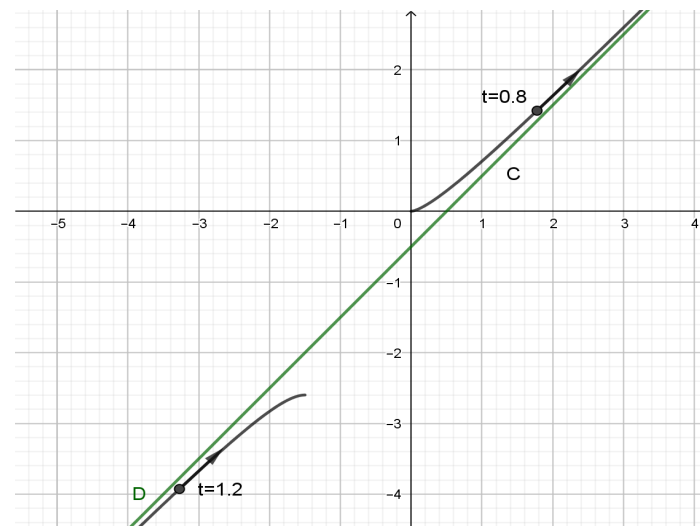
► $\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} g(t) - y_{N(t)} = 0^+$ donc la courbe C est au-dessus la droite D

Par ailleurs, pour t tendant vers 1 par valeurs supérieures à 1 :

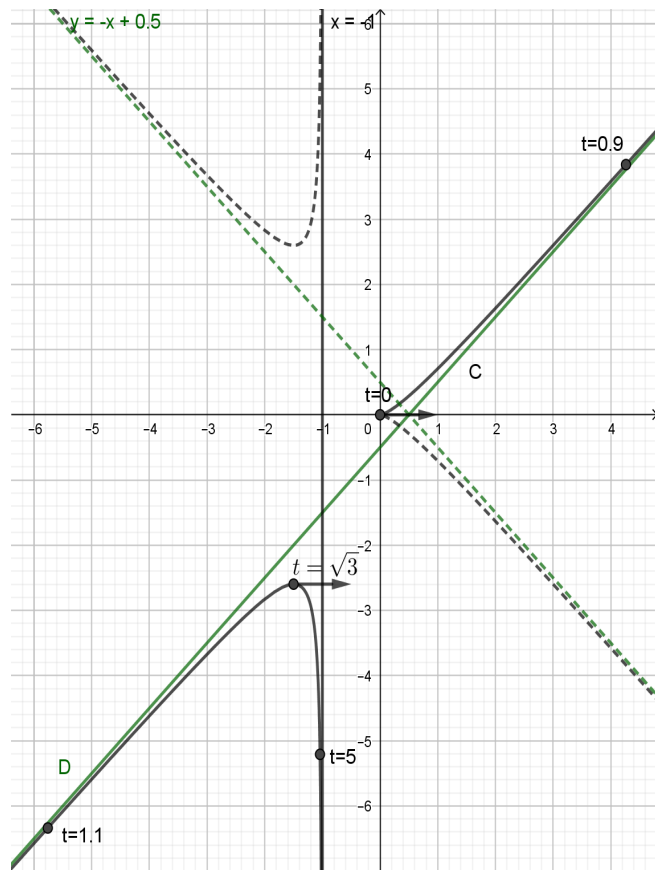
► f est croissante sur $]1; \sqrt{3}]$ donc la courbe C est dirigée vers la droite et $\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t > 1}} f(t) = -\infty$ donc la courbe C admet des abscisses arbitrairement grandes

« négativement c'est-à-dire « infiniment à gauche »

► $\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t > 1}} g(t) - y_{N(t)} = 0^-$ donc la courbe C est en-dessous de la droite D



Q19. et Q20.



Problème 2 - Marche aléatoire sur le net

Partie I - Un premier exemple

Q.21. Les coefficients de la matrice de transition sont définis par :

Probabilité d'être sur la page i à l'instant $n+1$ sachant ...

$$\begin{pmatrix} \dots & t_{i,j} & \dots \end{pmatrix}$$

... qu'on était sur la page j à l'instant n

$$\text{Ainsi, } T_4 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.22. $t_{i,j} = P_{A_n(j)}(A_{n+1}(i))$

Or $(A_{n+1}(i))_{i \in \{1,2,3,4\}}$ est un système complet d'événements, car à l'instant $\tau = n+1$, l'internaute est sur la page 1 ou 2 ou 3 ou 4 et sur une seule d'entre elles. ainsi la

formule des probabilités totales donne : $\forall B \in \Omega, P(B) = \sum_{i=1}^4 P(B \cap A_{n+1}(i))$

Ainsi en particulier $\forall j \in \{1,2,3,4\}, P(A_n(j)) = \sum_{i=1}^4 P(A_n(j) \cap A_{n+1}(i))$

$P(A_n(j)) = \sum_{i=1}^4 P(A_n(j)) \times P_{A_n(j)}(A_{n+1}(i))$ d'après la formule des probabilités composées

$$P(A_n(j)) = P(A_n(j)) \sum_{i=1}^4 t_{i,j}$$

Or, par hypothèse, $P(A_n(j)) \neq 0$ donc $1 = \sum_{i=1}^4 t_{i,j}$

Q23. $(A_n(j))_{j \in \{1,2,3,4\}}$ est un système complet d'événements, car à l'instant $\tau = n$, l'internaute est sur la page 1 ou 2 ou 3 ou 4 et sur une seule d'entre elles. ainsi la formule

des probabilités totales donne : $p_{n+1}(1) = P(A_{n+1}(1)) = \sum_{j=1}^4 P(A_n(j) \cap A_{n+1}(1))$

$p_{n+1}(1) = \sum_{j=1}^4 P(A_n(j)) \times P_{A_n(j)}(A_{n+1}(1))$ d'après la formule des probabilités composées

$$p_{n+1}(1) = \sum_{j=1}^4 p_n(j) t_{1,j}$$

Q24 De même : $p_{n+1}(2) = \sum_{j=1}^4 p_n(j) t_{2,j}, p_{n+1}(3) = \sum_{j=1}^4 p_n(j) t_{3,j}, p_{n+1}(4) = \sum_{j=1}^4 p_n(j) t_{4,j}$

$$\text{Q25. } T_4 U_n = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n(1) \\ p_n(2) \\ p_n(3) \\ p_n(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^4 p_n(j)(1,j) \\ \sum_{j=1}^4 p_n(j)(2,j) \\ \sum_{j=1}^4 p_n(j)(3,j) \\ \sum_{j=1}^4 p_n(j)(4,j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n+1}(1) \\ p_{n+1}(2) \\ p_{n+1}(3) \\ p_{n+1}(4) \end{pmatrix} = T_{n+1}$$

Q26. Soit $HR(n) : \ll U_n = (T_4)^n U_0 \gg$

Initialisation : $(T_4)^0 = I_4$ donc $HR(0)$ est vraie.

Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $HR(n)$ soit vraie

$$U_{n+1} = T_4 U_n = T_4 (T_4)^n U_0 \text{ d'après } HR(n)$$

Ainsi $U_{n+1} = (T_4)^{n+1} U_0$ donc $HR(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $HR(n)$ est vraie.

Partie II - Étude d'un polynôme et de trois suites

Q27. $S(1) = 4 \times 1^3 - 3 \times 1 - 1 = 4 - 3 - 1 = 0$

$S'(X) = 12X^2 - 3$ donc $S'(1) = 12 \times 1^2 - 3 = 9 \neq 0$ donc 1 est racine simple de S

$$S\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{4}{8} + \frac{3}{2} - 1 = \frac{-1+3-2}{2} = 0$$

$$S'\left(-\frac{1}{2}\right) = 12 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3 = \frac{12}{4} - \frac{12}{4} = 0 \text{ donc } -\frac{1}{2} \text{ est racine de S d'ordre au moins 2}$$

La somme des ordres de multiplicités des racines de S devant être inférieure ou égale à son degré : $-\frac{1}{2}$ est racine double de S.

Q28. La division euclidienne de X^n par $S(X)$ assure l'existence et l'unicité d'un couple de polynômes $(Q(X); R(X))$ tels que : $\begin{cases} X^n = S(X)Q(X) + R(X) \\ \deg(R(X)) < \deg(S(X)) = 3 \end{cases}$

Ainsi en posant $R(X) = \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n$ on obtient l'existence de $(\alpha_n; \beta_n; \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et $Q \in \mathbb{R}(X)$ demandés.

Q29. $1^n = S(1)Q(1) + \alpha_n + \beta_n + \gamma_n$ or $S(1) = 0$ donc $1 = \alpha_n + \beta_n + \gamma_n$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^n = S\left(-\frac{1}{2}\right)Q\left(-\frac{1}{2}\right) + \alpha_n \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \beta_n \left(-\frac{1}{2}\right) + \gamma_n \text{ or } S\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

donc $\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{4} \alpha_n - \frac{1}{2} \beta_n + \gamma_n$

Q30. $n X^{n-1} = S'(X)Q(X) + S(X)Q'(X) + 2\alpha_n X + \beta_n$ or $S'\left(-\frac{1}{2}\right) = S\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ donc

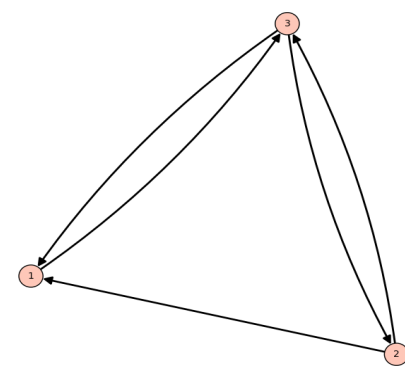
$$n \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2\alpha_n \left(-\frac{1}{2}\right) + \beta_n \text{ i.e. } n \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\alpha_n + \beta_n$$

Q31. $\left| n \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right| = \left| 2(-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \right| = 4n \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$n \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une exponentielle de base $\frac{1}{2}$, or les croissances comparées assurent que toute fonction exponentielle est prépondérante sur les fonctions polynomiales, ainsi comme $\frac{1}{2} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Les suites sont donc convergentes et $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{4}{9} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \frac{4}{9} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = \frac{1}{9} \end{cases}$

Partie III. Un deuxième exemple
Q32.



Q33. $\det(XI_3 - T_3) = \begin{vmatrix} X & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & X & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-1 & X-1 & X-1 \\ 0 & X & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & X \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$

$$= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & X & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & X \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & X & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & X+1 \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$= (X-1) \begin{vmatrix} X & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & X+1 \end{vmatrix} \text{ par développement suivant la première colonne}$$

$$= (X-1) \left(X(X+1) + \frac{1}{4} \right) = (X-1) \left(X^2 + X + \frac{1}{4} \right) = (X-1) \left(X + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} S(X)$$

Q34. Les valeurs propres de T_3 sont les racines de son polynôme caractéristique donc les racines de S : 1 et $-\frac{1}{2}$.

Q35. 1 est valeur propre de T_3 d'ordre de multiplicité 1 donc : $\dim(\text{Ker}(I_3 - T_3)) = 1$

$$\text{Ker}(I_3 - T_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$= \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$= \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2$$

$$= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Vérification : } T_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$-\frac{1}{2}$ est valeur propre de T_3 d'ordre de multiplicité 2 donc : $\dim(\text{Ker}(I_3 - T_3)) \in \{1; 2\}$

$$\text{Ker} \left(-\frac{1}{2}I_3 - T_3 \right) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{cases} L_1 \leftarrow -2L_1 \\ L_2 \leftarrow -2L_2 \\ L_3 \leftarrow -2L_3 \end{cases}$$

$$= \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

$$= \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$= \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{donc } \dim \left(\text{Ker} \left(-\frac{1}{2}I_3 - T_4 \right) \right) = 1$$

Q36. La somme des dimensions des sous-espaces propres de T_3 est 2 mais sa taille est 3 donc, d'après le théorème de diagonalisation, T_3 n'est pas diagonalisable.

$$\text{Q37. } (T_3)^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(T_3)^3 = T_3(T_3)^2 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$S(T_3) = 4(T_3)^3 - 3T_3 - I_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Q38. $a+b+c = p_0(1) + p_0(2) + p_0(3) = P(A_0(1)) + P(A_0(2)) + P(A_0(3)) = 1$ car $(A_0(1); A_0(2); A_0(3))$ forme un système complet d'événements : à l'instant $\tau=0$, l'internaute est sur la page 1 ou 2 ou 3 et sur une seule d'entre elles.

Q39. $S(T_3) = 0_3$ ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $(T_3)^n = \alpha_n(T_3)^2 + \beta_n T_3 + \gamma_n I_3$

$$\text{Q40. } U_n = (\alpha_n(T_3)^2 + \beta_n T_3 + \gamma_n I_3) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha_n \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2a+b+c \\ 2a+b \\ 2b+3c \end{pmatrix} + \beta_n \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b+c \\ c \\ 2a+b \end{pmatrix} + \gamma_n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Q41. $p_n(1) = \frac{\alpha_n}{4}(2a+b+c) + \frac{\beta_n}{2}(b+c) + \gamma_n a$ or, d'après Q31, les suites (α_n) ; (β_n) et (γ_n) sont convergentes, donc $(p_n(1))$ est convergente et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(1) = \frac{1}{9}(2a+b+c) + \frac{2}{9}(b+c) + \frac{a}{9} = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c = \frac{1}{3}(a+b+c) = \frac{1}{3} \quad \text{cf Q38.}$$

$$\text{De même : } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(2) = \frac{1}{9}(2a+b) + \frac{2}{9}c + \frac{1}{9}b = \frac{2}{9}(a+b+c) = \frac{2}{9}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(3) = \frac{1}{9}(2b+3c) + \frac{2}{9}(2a+b) + \frac{1}{9}c = \frac{4}{9}a + \frac{4}{9}b + \frac{4}{9}c = \frac{4}{9}(a+b+c) = \frac{4}{9}$$

Les probabilités des événements $A_n(1)$, $A_n(2)$ et $A_n(3)$ sont arbitrairement proches respectivement de $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$ et $\frac{4}{9}$ à partir d'un certain rang.

Plus concrètement mais moins rigoureusement, pour n « très grand » on peut considérer que l'internaute se trouve sur la page 1 avec une probabilité de $\frac{1}{3}$, sur la page 2 avec une probabilité de $\frac{2}{9}$, et sur la page 3 avec une probabilité de $\frac{4}{9}$.

Partie IV - Popularité d'une page

Q42. Les pages 2, 3 et 4 ont un lien vers la page 1 : la page 1 semble donc plus populaire que les autres. Cependant, la page 1 a des liens vers les pages 2,3 et 4 : la page 1 est donc moins populaire que les autres. Les quatre pages semblent avoir la même popularité (difficile d'établir une relation d'ordre total sur les sommets du graphes avec cette simple définition : des précisions à la fin du corrigé).

Q43. $R = T_3 R$ donc R est un vecteur propre de T_3 associé à la valeur propre 1.

Q44. D'après Q35, $R \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ de plus $r(i) \in [0;1]$ et $r(1) > 0$

On peut donc poser par exemple $R = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et dans ce cas $\|R\|_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{9}{4}$

Q45. $R' = \frac{4}{9} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ donc R' est aussi vecteur propre de T_3

associé à la valeur propre 1 donc solution du système (2).

Q46. D'après R' , $r(3) > r(1) > r(2)$ donc la page 3 est plus populaire que la page 1 elle-même plus populaire que la page 2.

Bonus : Et pour le graphe de la partie I ?

$\text{Ker}(I_4 - T_4) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ donc $R' = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ ainsi $r(1) > r(3) > r(2) > r(4)$