Concours ATS 2016

Exercice 1
On considère l'ensemble U des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

Pour un $u \in U$ les deux premiers termes u_0 et u_1 sont donnés.
La suite nulle définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 0$ appartient à U.

1. Montrer que si $a \in U$, $b \in U$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $a + b \in U$ et $\alpha a \in U$.

   En déduire que U est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2. Soient c et d les deux suites appartenant à U telles que $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $d_0 = 0$ et $d_1 = 1$.

   (a) Montrer que (c, d) est une base de U.

   (b) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel U ?

3. (a) Montrer qu'il existe deux réels distincts et non nuls ρ et σ que l'on calculera, avec $\rho < 0 < \sigma$, tels que les suites géométriques $(\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sigma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à U. On notera r et s les suites telles que $\forall N \in \mathbb{N}$, $r_n = \rho^n$ et $s_n = \sigma^n$.

   (b) Montrer que (r, s) est une autre base de U.

4. (a) Si v est la suite de U telle que $v_0 = x$, $v_1 = y$, donner en fonction de x et u les composantes de v dans la base (r, s).

   (b) En déduire une formule générale de v_n en fonction de n (sans utiliser la formule de récurrence).

   Les deux questions d'informatique suivantes peuvent être rédigées au choix en pseudo-code ou en Scilab.

5. (a) Écrire une procédure informatique F ayant pour variables d'entrée deux réels x, y et un entier naturel n et qui renvoie le terme v_n de la suite $v \in U$ telle que $v_0 = x$ et $v_1 = y$.

   La fonction F utilisera la relation de récurrence $v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n$ dans une boucle ou de manière récursive.

   (b) Écrire une procédure informatique G ayant également pour variable d'entrée deux réels x, y et un entier naturel n et qui renvoie aussi le terme v_n de la suite $v \in V$ telle que $v_0 = x$ et $v_1 = y$, mais sans faire de boucle (en utilisant la formule établie à la question 4.b).

   (c) Expliquez quelle est, entre F et G, la fonction la plus efficace pour calculer v_n.

Exercice 2
On considère un espace vectoriel E de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ et un endomorphisme f de E ayant pour matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{U}$.

1. (a) Déterminer une base de l'image et du noyau de f.
   (b) Déterminer le polynôme caractéristique de A.
   (c) Déterminer les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 de A. On choisira $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
   (d) Déterminer des vecteurs propres v_1, v_2 et v_3 de A associés respectivement aux valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3 et tels que leur première composante soit égale à 1.
   (e) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de E.
2. (a) Donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.
   (b) Calculer l'inverse P^{-1} de P.
3. Calculer A^2 et A^3.
4. Montrer par récurrence que pour tout entier n strictement positif on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_n & a_{n+1} & a_n \end{pmatrix}$$

   où les a_n sont les termes consécutifs d'une même suite. Déterminer une relation de récurrence pour la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donner a_1, a_2 et a_3.
5. (a) Montrer que l'on a pour tout entier naturel n non nul, $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$, avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) Diagonaliser B en déterminant une matrice inversible Q et une matrice diagonale Δ avec $B = Q\Delta Q^{-1}$.
   (c) Calculer l'inverse Q^{-1} de Q.
   (d) Pour tout entier strictement positif n, calculer B^n en fonction de n.
6. (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = B^{n-1} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.
   (b) Donner une expression de a_n pour tout entier naturel n non nul.

Exercice 3

Soit la fonction $f :]0\,;+\infty[\times]0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{\ln(1+xy^2)}{y^2}$$

et la fonction $g :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{\ln(1+xy^2)}{y^2}\,\mathrm{d}y.$$

On se propose de calculer une expression de $g(x)$, puis de $g'(x)$. On calcule ensuite $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ puis l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y$ que l'on comparera à $g'(x)$.

1. (a) Pour un x positif fixé, montrer que $\displaystyle\lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(1+xy^2)}{y^2} = x$.

   (b) Que peut–on en déduire pour la convergence de l'intégrale définissant f ?

2. (a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que l'on précisera, l'égalité :

$$g(x) = -\ln(1+x) + 2x\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+xy^2}.$$

   (b) À l'aide d'un changement de variable montrer qu'il existe deux fonctions à préciser a et b dépendant de x telles que :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+xy^2} = a(x)\int_0^{b(x)} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

   (c) En déduire une expression de $g(x)$ sans intégrale.

   (d) En déduire une expression de $g'(x)$ (également sans intégrale).

3. (a) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\ln(1+xy^2)}{y^2}\right)$.

   (b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y$.

   (c) Que remarque–t–on ?

Exercice 4

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π–périodique, définie sur $]-\pi\,;\pi]$ par :

$$g(t) = \begin{cases} \cos t & \text{si } t \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right], \\ 0 & \text{si } t \in \left]-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]. \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction g entre -3π et 3π.
2. Quelle est la parité de la fonction g ? Justifier votre réponse.
3. La série de Fourier de g est notée $g(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\big)$.
   (a) Donner les coefficients b_n pour tout entier n strictement positif.
   (b) Calculer a_0 et a_1.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on a :
   $$a_n = \frac{1}{\pi(n+1)} \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi(n-1)} \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)$$
   (d) En déduire que si n est impair et $n \neq 1$, alors $a_n = 0$.
   (e) Montrer que si $n = 2p$ est un entier pair non nul, alors $a_{2p} = \dfrac{2(-1)^{p+1}}{\pi(4p^2-1)}$.
4. On s'intéresse maintenant à la convergence de la série de Fourier de g.
   (a) A–t–on pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = Sg(t)$? Justifier précisément votre réponse.
   (b) Montrer que
   $$\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right], \quad \cos t = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(4p^2-1)} \cos(2pt).$$
   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1}$.
5. (a) Appliquer l'identité de Parseval à la fonction g.
   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4p^2-1}\right)^2$.

Exercice 5

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère les points $A(1\,;1)$, $B(-1\,;-1)$ et la droite D d'équation $y=-x$.

Pour un point N de D de coordonnées $(t\,;-t)$, on considère la droite (BN), la droite (AN) et la droite Δ passant par A et perpendiculaire à la droite (AN).

Le point M est l'intersection, si elle existe, de la droite (BN) et de la droite Δ.

1. En fonction de t, donner une équation cartésienne de la droite (BN).
2. En fonction de t, donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{AN}$.
3. En fonction de t,donner une équation cartésienne de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à (AN).
4. Pour quelles valeurs de $t$les droites (BN) et Δ sont-elles parallèles ? On trouvera deux valeurs notées dans la suite t_1 et t_2.
5. Calculer en fonction de t les coordonnées du point L en résolvant un système formé par les équations des droites (BN) et Δ pour $t\in\mathbb{R}\setminus\{t_1,t_2\}$.

   On appelle désormais G la courbe décrite par M quand N parcourt la droite D.
6. On note $u:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $v:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ les fonctions telles que :

$$u(t)=\frac{t+1}{-t+1}=\frac{2}{-t+1}-1 \text{ et } v(t)=\frac{-t+1}{t+1}=\frac{2}{t+1}-1$$

   (a) Préciser les domaines de définition de u et v.

   (b) Calculer les dérivées de u et v et préciser les sens de variation de u et v sur chaque intervalle ou elles sont définies.

   (c) Donner un tableau de variations conjointes de u et v en précisant leurs limites aux extrémités de chaque intervalle où elles sont définies.
   On ne demande pas de représentation de u et v.
7. (a) Le point A appartient–il à G ? Si c'est le cas, quelle est la valeur de t qui lui est associée ?

   (b) Le point B appartient–il à G ? Si c'est le cas, quelle est la valeur de t qui lui est associée ?
8. (a) Calculer $u(t)v(t)$. Que remarque–t–on ?

   (b) On appelle H la courbe d'équation cartésienne $y=\dfrac{1}{x}$.
   Peut–on déduire de ce qui précède que G est la courbe H dont on a retiré un ou plusieurs points ? Quel(s) point(s) retirer à H pour obtenir G ?