Mathématiques, concours ATS 2016, un corrigé

Exercice 1

1. On introduit les notations $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   On a alors $a + b = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et
   $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} + b_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + b_{n+1} + 2b_n$
   $= a_{n+1} + b_{n+1} + 2(a_n + b_n)$ et donc :
   $$\boxed{a + b \in U}$$
   Par ailleurs, $\alpha a = (\alpha a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et
   $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ et en multipliant cette égalité par α on obtient :
   $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + 2\alpha a_n$ ou encore :
   $$\boxed{\alpha a \in U}$$
   $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à termes réels est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de référence et $U \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Par ailleurs, $U \neq \emptyset$ puisque, comme l'énoncé le rappelle la suite nulle est dans U, enfin on vient de montrer que U est stable par passage à la combinaison linéaire. Ainsi nous venons de démontrer que U est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou encore
   $$\boxed{U \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel}}$$
2. De même qu'en question précédente on notera $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $d = (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Montrons que (c, d) est libre.
   Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha c + \beta d = 0$. On a alors :
   $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha c_n + \beta d_n = 0$.
   En particulier on obtient $\alpha = 0$ en prenant $n = 0$ et $\beta = 0$ pour $n = 1$, soit encore que la famille (c, d) est libre.
   Montrons que (c, d) est génératrice de U :
   Soit $u \in U$ que l'on notera comme précédemment $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Considérons alors $w = u_0c + u_1d$.
   Montrons que $w = u$, par une récurrence forte : $w_0 = u_0$ et $w_1 = u_1$ est évident grâce aux valeurs de c_0, c_1, d_0 et d_1.
   Soit $n \geq 1$ supposons que $\forall p \leq n, w_p = u_p$ alors
   $w_{n+1} = u_0c_{n+1} + u_1d_{n+1} = u_0(c_n + 2c_{n-1}) + u_1(d_n + 2d_{n-1})$ car $(c, d) \in U^2$
   $= (u_0c_n + u_1d_n) + 2(u_0c_{n-1} + u_1d_{n-1})$

$= u_n + 2u_{n-1}$ par hypothèse de récurrence
$= u_{n+1}$ puisque $u \in U$. Ceci termine la récurrence et donc $w = u$ ou encore $u = u_0 c + u_1 d$ et (c, d) est génératrice de U.

$$\boxed{(c, d) \text{ est une base de } U}$$

(b) La dimension d'un espace vectoriel est le nombre de vecteurs d'une de ses bases.(c, d) étant une base de U :

$$\boxed{\dim U = 2}$$

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. On considère la suite $X = (x^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors $X \in U \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, x^{n+2} = x^{n+1} + 2x^n \Leftrightarrow x^2 = x + 2$ puisque $x \neq 0$ et donc : $X \in U \Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0$
En posant $\rho = -1$ et $\sigma = 2$ on répond à la question.

$$\boxed{\rho = -1, \sigma = 2}$$

(b) On a vu en question précédente que $(r, s) \in U^2$. Par ailleurs, ici (r, s) sont au nombre de deux dans un espace vectoriel de dimension 2 d'après la question 2-(b). Il suffit donc de démontrer que (r, s) est libre pour s'assurer du fait que c'est une base de U.
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha r + \beta s = 0$ alors on a nécessairement :
$$\begin{cases} \alpha r_0 + \beta s_0 = 0 \\ \alpha r_1 + \beta r_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\beta = 0 \\ -\alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$$
$\Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$ et (r, s) est libre.

$$\boxed{(r, s) \text{ est une "autre" base de } U}$$

4. (a) On cherche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\nu = \alpha r + \beta s$. On sait que (α, β) existe car (r, s) est une base de U et il est nécessaire que $\begin{cases} \nu_0 = \alpha + \beta \\ \nu_1 = -\alpha + 2\beta \end{cases}$

On a donc nécessairement $\begin{cases} \alpha = \frac{2\nu_0 - \nu_1}{3} \\ \beta = \frac{\nu_0 + \nu_1}{3} \end{cases}$

$$\boxed{\nu = \frac{2x - y}{3} r + \frac{x + y}{3} s}$$

(b) $r = \left((-1)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $s = \left(2^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \nu_n = \frac{x}{3}(2^n + 2.(-1)^n) + \frac{y}{3}(2^n - (-1)^n)}$$

5. (a) function f=F(x,y,n)
select n
case 0 then
f=x

```
case 1 then
f=y
else
f=F(x,y,n-1)+2F(x,y,n-2)
end
endfunction
```

(b)
```
function g=G(x,y,n)
g=x/3*(2^n)+2*(-1)^n)+y/3*(2^n-(-1)^n)
endfunction
```

(c) Il s'agit ici de comparer les complexités des deux fonctions. La fonction F ici récursive est en complexité exponentielle. La fonction G est en complexité logarithmique (en tenant compte des calculs de puissance). C'est donc la fonction $\boxed{G \text{ qui est la plus efficace}}$.

Exercice 2

1. (a) $u = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 \in \ker f$

$\Leftrightarrow A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = -\gamma \end{cases}$

donc $\ker f$ =vect$(1, 0, -1)$ et $(1, 0, -1)$ est libre car non nul.

$$\boxed{(1, 0, -1) \text{ est une base de } \ker f}$$

D'après le théorème du rang, $\dim \ker f + \dim Imf = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ et donc $\dim Imf = 2$. Par ailleurs, Imf =vect$[(0, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 0)]$ car l'image de A est engendrée par ses vecteurs colonnes. Il suffit dès lors de choisir deux vecteurs libres parmi les trois générateurs. Ici :

$$\boxed{((0, 1, 0), (1, 1, 1)) \text{ est une base de } Imf}$$

(b) $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -1 & X-1 & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ -X & -1 & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ 0 & -2 & X \end{vmatrix}$

$= X[X(X-1)-2] = X(X^2 - X - 2)$

$$\boxed{\chi_A(X) = X(X+1)(X-2)}$$

(c) $\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{0, -1, 2\}$

$$\boxed{\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2}$$

(d) $\nu_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(A) \Leftrightarrow A. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x + y + z = -y \\ y = -z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = -y \end{cases}$.

$$\boxed{\nu_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\nu_2 \in E_0(A) \Leftrightarrow \nu_2 \in \ker A$ et donc d'après la question 1-a

$$\boxed{\nu_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$\nu_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \Leftrightarrow A. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x + y + z = 2y \\ y = 2z \end{cases}$

$$\boxed{\nu_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

(e) Ici il y a une erreur d'énoncé car $\nu_i \notin E$, l'énoncé aurait du être : montrer que (ν_1, ν_2, ν_3) est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

On peut remarquer que (ν_1,ν_2,ν_3) sont trois vecteurs de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est lui même de dimension 3 et qu'il suffit donc de prouver la liberté de (ν_1,ν_2,ν_3) pour montrer que c'est une base. Or un résultat du cours dit que comme (ν_1,ν_2,ν_3) sont trois vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux, ils sont libres on peut donc affirmer :

$$\boxed{(\nu_1,\nu_2,\nu_3) \text{ est une base de } M_{3,1}(\mathbb{R})}$$

2. (a) f possède trois valeurs propres distinctes elle est donc diagonalisable. Ses matrices représentatives dans la base (u_1,u_2,u_3) et dans la base (ν_1,ν_2,ν_3) sont semblables et donc si on note :

$$\boxed{P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&2\\1&-1&1\end{pmatrix} \text{ et } D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}} \text{on a bien } A=PDP^{-1}$$

(b) $P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$

Soit $\begin{cases}x+y+z=\alpha\\-x+2z=\beta\\x-y+z=\gamma\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y+z=\alpha\\y+3z=\alpha+\beta\\-y+3z=\beta+\gamma\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y+z=\alpha\\y+3z=\alpha+\beta\\6z=\alpha+2\beta+\gamma\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}x=\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{3}\beta+\frac{1}{3}\gamma\\y=\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\gamma\\z=\frac{1}{6}\alpha+\frac{2}{6}\beta+\frac{1}{6}\gamma\end{cases}$

$$\boxed{P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&-2&2\\3&0&-3\\1&2&1\end{pmatrix}}$$

3. $$\boxed{A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}, A^3=\begin{pmatrix}1&3&1\\3&5&3\\1&3&1\end{pmatrix}}$$

4. On a $\begin{pmatrix}a_n&a_{n+1}&a_n\\a_{n+1}&a_{n+2}&a_{n+1}\\a_n&a_{n+1}&a_n\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{n+1}&a_{n+1}+2a_n&a_{n+1}\\a_{n+2}&a_{n+2}+2a_{n+1}&a_{n+2}\\a_{n+1}&a_{n+1}+2a_n&a_{n+1}\end{pmatrix}$

En posant $\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$ on obtient bien :

$A^{n+1}=\begin{pmatrix}a_{n+1}&a_{n+2}&a_{n+1}\\a_{n+2}&a_{n+3}&a_{n+2}\\a_{n+1}&a_{n+2}&a_{n+1}\end{pmatrix}$

Reste à initialiser la récurrence. On pose $a_0=1$ et $a_1=0$ de façon à avoir $A^0 = I_3$ et alors $a_2 = 1$ et $a_3 = 1$ donc $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_1 \\ a_2 & a_3 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$ et tous les éléments de la récurrence souhaitée sont en place.

$$\boxed{a_0 = 1, a1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1}$$

5. (a) $B\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} + 2a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}}$$

(b) $\chi_B(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -2 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X(X-1) - 2 = (X+1)(X-2)$
B possède donc deux valeurs propres distinctes et B est de taille 2×2. C'est une condition suffisante pour que B soit diagonalisable. On remarque que $B.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $B.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
En posant $\boxed{Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$ on a donc bien $B = Q\Delta Q^{-1}$

(c) En procédant de même qu'en question 2-(b) et tous calculs faits on obtient

$$\boxed{Q^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

(d) Par récurrence montrons que $\forall n \geq 1, B^n = Q\Delta^n Q^{-1}$.
C'est clairement vrai pour $n = 1$ d'après la question 5-(b).
Si $B^n = Q\Delta^n Q^{-1}$ alors $B^{n+1} = B^n.B = Q\Delta^n Q^{-1} Q\Delta Q^{-1} = Q\Delta^{n+1}Q^{-1}$ ce qui achève la récurrence.
Or Δ étant diagonale on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.
Le calcul de la relation $B^n = Q\Delta^n Q^{-1}$ donne alors :

$$\boxed{B^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^n + 2^{n+1} & -2.(-1)^n + 2^{n+1} \\ -(-1)^n + 2^n & 2(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}}$$

6. (a) Par récurrence : pour $n = 1$, $\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = B^0.\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.
Si $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = B^{n-1}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ alors
$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = B^n\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ ce qui achève la récurrence.

(b) On a donc $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = B^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'où l'on tire sans mal

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{3}[(-1)^n + 2^{n-1}]}$$

Exercice 3

1. (a) Il faut distinguer le cas $x = 0$ qui ne pose aucun problème car $\frac{\ln(1)}{y^2} = 0$ et donc $\lim\limits_{y \to 0+} \frac{\ln(1)}{y^2} = 0 = x$ du cas où $x \neq 0$:

   Comme $xy^2 \to 0$ on a $\ln(1+xy^2) \sim_0 xy^2$ et donc $\lim\limits_{y \to 0+} \frac{\ln(1+xy^2)}{y^2} = x$.

$$\boxed{\forall x \geq 0, \lim_{y \to 0+} \frac{\ln(1+xy^2)}{y^2} = x}$$

   (b) $\forall x \geq 0, y \to \frac{\ln(1+xy^2)}{y^2}$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 par la valeur x.

   $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+xy^2)}{y^2} dy$ est donc faussement impropre.

$$\boxed{\forall x \geq 0, \int\limits_0^1 \frac{\ln(1+xy^2)}{y^2} dy \text{ est convergente}}$$

2. (a) Soit $\epsilon \in]0,1]$ on considère pour $x > 0$ fixé, $I_\epsilon(x) = \int\limits_\epsilon^1 \frac{\ln(1+xy^2)}{y^2} dy$.

   $I_\epsilon(x)$ est une intégrale propre et de plus si $\epsilon \to 0$ alors $I_\epsilon(x) \to g(x)$ d'après la question 1-(b).

   On va pratiquer une intégration par partie sur $I_\epsilon(x)$ en posant $\begin{cases} u(y) = \ln(1+xy^2) \\ v(y) = -\frac{1}{y} \end{cases}$. u et v sont $C^1([\epsilon, 1])$ et donc :

   $I_\epsilon(x) = \int\limits_\epsilon^1 u(y)v'(y)dy = [u(y)v(y)]_\epsilon^1 - \int\limits_\epsilon^1 u'(y)v(y)dy$

   $= \left[-\frac{\ln(1+xy^2)}{y}\right]_\epsilon^1 + \int\limits_\epsilon^1 \frac{2x}{1+xy^2} dy$

   $= -\ln(1+x) + \frac{\ln(1+x\epsilon^2)}{\epsilon} + 2x \int\limits_\epsilon^1 \frac{1}{1+xy^2} dy$

   En remarquant comme en question 1-a que :

   $\frac{\ln(1+x\epsilon^2)}{\epsilon} \sim \frac{x\epsilon^2}{\epsilon} \sim x\epsilon \to 0$ quand $\epsilon \to 0$ on obtient que $\int\limits_0^1 \frac{1}{1+xy^2} dy$ converge (ce qui d'ailleurs est évident puisque c'est l'intégrale d'une fonction continue sur $[0,1]$) et que :

$$\boxed{\forall x > 0, g(x) = -\ln(1+x) + 2x \int\limits_0^1 \frac{1}{1+xy^2} dy}$$

(b) Pour $x > 0$ on va poser $u(y) = \sqrt{x}y$. u est C^1 bijectif de $[0, 1]$ sur $[0, \sqrt{x}]$ et c'est donc un changement de variable licite. On a :
$\int\limits_0^1 \frac{1}{1+xy^2} dy = \int\limits_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \int\limits_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+u^2} du$
En posant $\boxed{a(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ et } b(x) = \sqrt{x}}$ on répond donc à la question.

(c) En remarquant que $\arctan'(u) = \frac{1}{1+u^2}$ on obtient :

$$\boxed{\forall x > 0, g(x) = -\ln(1+x) + 2\sqrt{x} \arctan(\sqrt{x})}$$

(d) g est dérivable comme somme, composée et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+ - *$.
On a $\forall x > 0, g'(x) = -\frac{1}{1+x} + 2\frac{1}{2\sqrt{x}} \arctan(\sqrt{x}) + 2\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}.\frac{1}{1+\sqrt{x}^2}$

$$\boxed{\forall x > 0, g'(x) = \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}}$$

3. (a) Sans difficulté, $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1+xy^2}}$

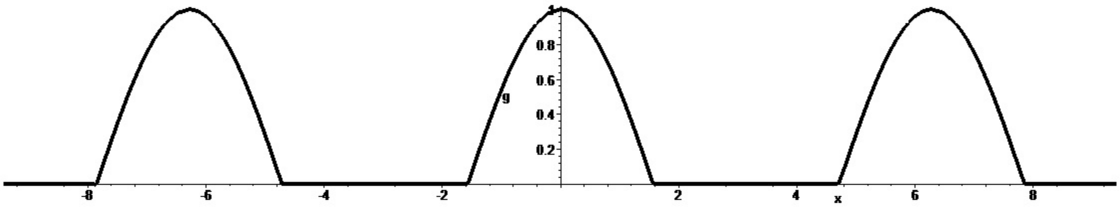
(b) On a donc $\int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+xy^2} dy = \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan(\sqrt{x})$ d'après la question 2-(b) et 2-(c)

$$\boxed{\int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy = \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}}$$

(c) Ici il faut répondre sans aucun doute que les réponses aux questions 2-(b) et 3-(c) coïncident. Cette question est à mon sens mal venue car ce résultat est hors programme de la classe d'ATS et dès lors on se demande bien pourquoi un étudiant aurait l'idée même que ceci n'est pas une simple coïncidence.

Exercice 4

1.



2. g est paire. En effet $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], g(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = g(x)$ et $\forall x \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[, g(-x) = 0 = g(x)$. Par périodicité, $g(\pi) = g($-$pi) = 0$ Enfin g est 2π périodique donc $\boxed{g \text{ est paire}}$.

3. (a) $\boxed{\forall n > 0, b_n = 0}$ puisque g est paire.

   (b) $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)dt = \frac{1}{2\pi}\left[\sin t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}$

   $a_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(t)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = \frac{1}{2}$

   $$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}, a_1 = \frac{1}{2}}$$

   (c) Pour $n \geq 2$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos(nt)dt$

   Or $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

   donc $a_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos((n+1)t) + \cos((n-1)t)dt$

   et donc $\boxed{\forall n \geq 2, a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+1}\sin\frac{(n+1)\pi}{2} + \frac{1}{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{2}\right]}$

   (d) Si n est impair $\frac{n+1}{2}$ et $\frac{n-1}{2}$ sont entiers et donc $\sin\frac{(n+1)\pi}{2} = \sin\frac{(n-1)\pi}{2} = 0$ et donc :

   $$\boxed{\text{Si } n \text{ est impair, } a_n = 0}$$

   (e) Si $n = 2p$ $\sin\frac{(n+1)\pi}{2} = \sin(\frac{\pi}{2} + p\pi) = (-1)^p$ et
   $\sin\frac{(n-1)\pi}{2} = \sin(-\frac{\pi}{2} + p\pi) = (-1)^{p-1}$
   et alors $a_{2p} = \frac{(-1)^p}{\pi}\left[\frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p-1}\right] = \frac{-2(-1)^p}{\pi(4p^2-1)}$

   $$\boxed{a_{2p} = \frac{2(-1)^{p+1}}{\pi(4p^2-1)}}$$

4. (a) La fonction g est continue et C^1 par morceaux. Le théorème de Dirichlet permet d'affirmer donc que :

   $$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = Sg(t)}$$

   (b) En appliquant le résultat précédent on a :
   $\forall t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], g(t) = Sg(t)$

   Soit encore $\forall t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \cos(t) = a_0 + a_1\cos(t) + \sum\limits_{p=1}^{+\infty} a_{2p}\cos(2pt)$.

   Soit encore $\forall t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \cos(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{2}{\pi}\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1}\cos(2pt)$

en vertu des résultats obtenus dans la question 3.
Donc :

$$\boxed{\forall t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], \cos(t) = \tfrac{4}{\pi} + \tfrac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1} \cos(2pt)}$$

(c) En évaluant l'expression précédente pour $t = 0$ on obtient

$$\boxed{\sum_{p=1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1} = \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}}$$

5. (a) L'identité de Parseval est :

$$\boxed{a_0^2 + \tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g^2(t)dt}$$

(b) En l'appliquant aux valeurs trouvées ici :

$$\boxed{\sum_{p=1}^{+\infty} \tfrac{1}{(4p^2-1)^2} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\pi^2}{16}}$$

Exercice 5

1. $\overrightarrow{BN} \left| \begin{array}{c} t+1 \\ -t+1 \end{array} \right.$

$M \left| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right. \in (BN) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BM}) = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{cc} t+1 & x-1 \\ -t+1 & y+1 \end{array} \right| = 0$

$$\boxed{(BN) : (t-1)x + (t+1)y + 2t = 0}$$

2. $\boxed{\overrightarrow{AN} \left| \begin{array}{c} t-1 \\ -t-1 \end{array} \right.}$

3. $M \left| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right. \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AM} = 0$

$$\boxed{(\Delta) : (t-1)x - (t+1)y + 2 = 0}$$

4. (BN) et (Δ) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AM} = 0$

$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} t+1 \\ -t+1 \end{array} \right. . \left| \begin{array}{c} t-1 \\ -t-1 \end{array} \right. = 0$

$\Leftrightarrow t^2 - 1 - (1 - t^2) = 0 \Leftrightarrow t^2 = 1$

$$\boxed{t_1 = -1, t_2 = 1}$$

5. $M\left|\begin{array}{l}x\\ y\end{array}\right. \in \Delta\cap(BN) \Leftrightarrow \begin{cases}(t-1)x+(t+1)y+2t=0\\ (t-1)x-(t+1)y+2=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2(t-1)x+2(t+1)=0\\ 2(t+1)y+2(t-1)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{t+1}{1-t}\\ y=\frac{1-t}{t+1}\end{cases}$ car $t\notin\{-1,1\}$

$$\boxed{\Delta\cap(BN) \text{ est le point } G(t)\left|\begin{array}{l}\frac{t+1}{1-t}\\ \frac{1-t}{t+1}\end{array}\right.}$$

6. (a) $\boxed{\mathcal{D}_u=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[, \mathcal{D}_v=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[}$

(b) Sur leurs ensembles de définition, u et v sont dérivables car ce sont des fractions rationnelles.

$$\boxed{u'(t)=\frac{2}{(1-t^2)}, v'(t)=\frac{-2}{(t+1)^2}}$$

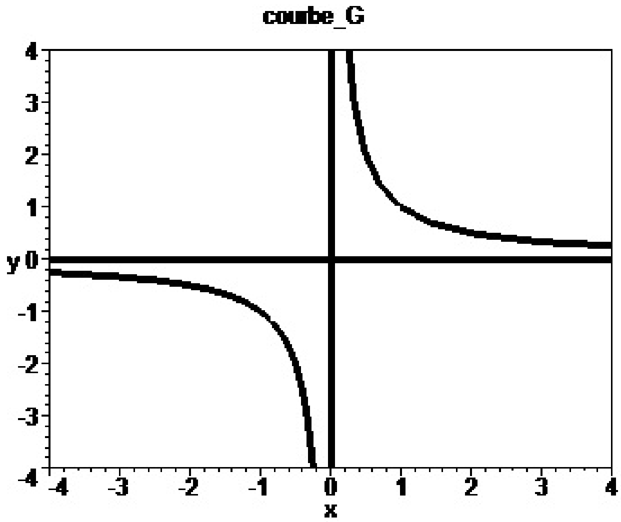
Ce qui permet de donner les sens de variations suivant :

$$\boxed{u \text{ est croissante sur } \mathcal{D}_u \text{ et } v \text{ est décroissante sur } \mathcal{D}_v}$$

(c)

t	$-\infty$		1		$+\infty$
u		$-1 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow -1$	

t	$-\infty$		-1		$+\infty$
v		$-1 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow -1$	



(d)

7. (a) Pour $t = 0$ on remarque que $u(0) = v(0) = 1$ donc A est sur $\mathbf{G}$

$$\boxed{A \text{ est sur } \mathbf{G} \text{ et est atteint pour le paramètre } t = 0}$$

(b) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\frac{2}{1-t} \neq 0$ et donc

$$\boxed{B \text{ n'est pas sur } \mathbf{G}}$$

8. (a) $\boxed{u(t)v(t) = 1}$. On remarque donc que $\mathbf{G}$ est une partie de la courbe d'équation $xy = 1$

(b) D'après les questions précédentes : $\boxed{\mathbf{G} \text{ est la courbe } \mathbf{H} \text{ dont on a retiré le point } B}$