Contrôle a posteriori de l' Épreuve de Mathématiques A - Session 2017

Commentaires et pistes de correction par Philippe GUILHAUMON

Problème d'algèbre linéaire

Commentaire . *Dans la description du début de l'exercice, on aurait pu souligner que pour une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on écrira $A^0 = I_n$.*

Partie I

1. La matrice A est une matrice *symétrique* et *réelle* : d'après le théorème spectral, nous savons qu'il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale réelle $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = P \times D \times P^T$. Nous concluons que $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$.
2. Pour calculer le spectre de A nous calculons son polynôme caractéristique $P_A(X) = \det(XI_3 - A)$

$$\det\left(\begin{bmatrix} X-1 & 1 & 1 \\ 1 & X-1 & 1 \\ 1 & 1 & X-1 \end{bmatrix}\right) \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \det\left(\begin{bmatrix} X+1 & 1 & 1 \\ X+1 & X-1 & 1 \\ X+1 & 1 & X-1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1}}{=} \det\left(\begin{bmatrix} X+1 & 1 & 1 \\ 0 & X-2 & 1 \\ 0 & 0 & X-2 \end{bmatrix}\right) = (X+1)(X-2)^2$$

   Nous en déduisons que le spectre de A est $\{-1, 2\}$ dont les multiplicités respectives sont $m_1 = 1$ et $m_{-2} = 2$.

   Le calcul des sous-espaces propres de A donne d'une part $E_{-1}(A) = Vect\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

   et $E_2(A) = E_{-1}(A)^{\perp}$ (pour le produit scalaire canonique sur les matrices colonnes à coefficients réels) puisque A est symétrique et réelle et $E_2(A) = Vect\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}$.
3. Si on note

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   Comme

$$D^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D + I_3$$

   Nous déduisons que l'on a $\boxed{A^2 = A + 2I_3}$ vu que A est semblable à D.

Pour tout entier $n \geq 2$ si nous multiplions l'identité $A^2 = A + 2I_3$ par A^{n-1} à gauche nous obtenons la relation $\boxed{A^{n+1} = A^n + 2A^{n-1}}$. Le cas $n = 1$ découle directement de la question précédente.

4. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$\mathcal{P}_n = \{\ (0 \leq k \leq n) \Rightarrow \left(\exists (u_k, v_k) \in \mathbb{R}^2,\ \text{avec}\ \ A^k = \begin{bmatrix} u_k & v_k & v_k \\ v_k & u_k & v_k \\ v_k & v_k & u_k \end{bmatrix}\right)\}$$

Nous établissons dans un premier temps cette formule par récurrence.

- La relation $\mathcal{P}_1$ est vraie en prenant $u_0 = 1$ et $v_0 = 1$ puis $u_1 = 1$, $v_1 = -1$.
- Si on suppose que l'on a un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie, alors $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. En effet, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n+1$, on a :
  — Si $k \leq n$, cela decoule du fait que $\mathcal{P}_n$ est vrai.
  — Si $k = n+1$, cela découle du fait que l'on a $A^{n+1} = A^n + 2A^{n-1}$ car il vient que

$$\begin{bmatrix} u_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} u_{n-1} & v_{n-1} & v_{n-1} \\ v_{n-1} & u_{n-1} & v_{n-1} \\ v_{n-1} & v_{n-1} & u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n + 2u_{n-1} & v_n + 2v_{n-1} & v_n + 2v_{n-1} \\ v_n + 2v_{n-1} & u_n + 2u_{n-1} & v_n + 2v_{n-1} \\ v_n + 2v_{n-1} & v_n + 2v_{n-1} & u_n + 2u_{n-1} \end{bmatrix}$$

  est de la forme voulue en posant $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$ et $v_{n+1} = v_n + 2v_{n-1}$.

En utilisant la question précédente et la propriété que $\mathcal{P}_n$, nous déduisons grâce à la question 4

$$A^{n+1} = A^n + 2A^{n-1},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star$$

que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} \\ v_{n+1} = v_n + 2v_{n-1} \end{array}\right.}$$

5. Nous savons que les suites récurrentes linéaires à deux pas $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solutions de

$$X_{n+2} = X_{n+1} + 2X_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de dimension deux dont une base est donnée par les suites $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$: nous pouvons donc en déduire qu'il existe quatre réels $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n \text{ et } v_n = \gamma 2^n + \delta(-1)^n$$

La prise en compte des conditions initiales $u_0 = u_1 = 1$ permet de conclure que

$$\boxed{\mathrm{u}_n = \frac{1}{3}\left(2^{n+1} + (-1)^n\right)}$$

alors que la contrainte $v_0 = 0,\ v_1 = -1$ permet d'avoir :

$$\boxed{\mathrm{v}_n = \frac{1}{3}\left((-1)^n - 2^n\right)}$$

Partie II

1. Si nous considérons la matrice $M = \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda^2 & \mu^2 \end{bmatrix}$ sous nos hypothèses, nous observons que M est inversible et que $M^{-1} = \dfrac{1}{\lambda\mu(\mu-\lambda)} \begin{bmatrix} \mu^2 & -\mu \\ -\lambda^2 & \lambda \end{bmatrix}$. Il s'ensuit que l'on a :

$$\boxed{\begin{aligned} U &= \frac{1}{\lambda(\mu-\lambda)}\left(\mu A - A^2\right) \\ V &= \frac{1}{\mu(\mu-\lambda)}\left(-\lambda A + A^2\right) \end{aligned}}$$

Comme enfin $A^3 = \lambda^3 U + \mu^3 V$, on a

$$\boxed{\mathrm{A}^3 = \frac{\lambda^2}{\mu-\lambda}\left(\mu A - A^2\right) + \frac{\mu^2}{\mu-\lambda}\left(-\lambda A + A^2\right) = (\lambda+\mu)\, A^2 + (-\lambda\mu)\, A}$$

2. Nous venons de voir que nous avons la relation $A\,(A - \lambda I_n)\,(A - \mu I_n) = 0_n$. Cependant le reste R_p de la division euclidienne de X^p par $X(X-\lambda)(X-\mu)$ est de la forme

$$R_p = aX^2 + bX + c$$

avec les conditions

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \lambda^2 & \lambda & 1 \\ \mu^2 & \mu & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda^p \\ \mu^p \end{bmatrix}$$

qui s'obtiennent en prenat comme valeurs respectives pour X : 0, λ et μ toutes différentes.
On trouve $c = 0$ et, sous nos hypothèses de travail,

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda^{p-1} - \mu^{p-1}}{\lambda - \mu} \\ \dfrac{\lambda\mu^{p-1} - \lambda^{p-1}\mu}{\lambda - \mu} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui nous permet d'avoir pour tout $p \geq 1$:

$$A^p = \frac{\lambda^{p-1} - \mu^{p-1}}{\lambda - \mu} \times A^2 + \frac{\lambda\mu^{p-1} - \lambda^{p-1}\mu}{\lambda - \mu} \times A$$

Et si nous substituons A^2 par $\lambda^2 U + \mu^2 V$ et A par $\lambda U + \mu V$ nous trouvons le résultat voulu comme le montre un calcul direct.

Commentaire . *Bien que classique pour les élèves qui ont au programme la notion de polynôme annulateur, il semble que la question posée ici soit trop difficile compte tenu du programme de la filière PT. Même si tous les éléments de la méthodologie proposée sont au programme.*

3. a. Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(\vec{x}) = \vec{0}$, en prenant la convention standard $f^0 = Id_{\mathbb{R}^n}$, on a $f^p(\vec{x}) = f^{p-1}(f(\vec{x})) = f^{p-1}(\vec{0}) = \vec{0}$. Nous en concluons que

$$\boxed{\ker f \subset \ker f^p, \ \forall p \in \mathbb{N}^\star}$$

b. C'est une conséquence de la question 2 et de l'isomorphisme d'espace vectoriels vu en première année

$$\Psi_{\varepsilon_0^n} : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

qui a un endomorphisme associe sa matrice dans la base canonique ε_0^n de $\mathbb{R}^n$ et du fait que ce dernier soit aussi un morphisme d'algèbre. Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$:

$$\boxed{\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \ \lambda\mu f^{p-1}(\vec{x}) = (\lambda + \mu)\, f^p(\vec{x}) - f^{p+1}(\vec{x})}$$

c. Si $\vec{x} \in \ker f^p$, on a deux cas de figures :
— Si $p = 1$, le résultat désiré est immédiat.
— Si $p \geq 2$, notons $p_0 \geq 1$ le plus petit entier $p \geq 1$ tel que $f^p(\vec{x}) = \vec{0}$: si on avait $p_0 > 1$, du fait que l'on ait simultanément $f^{p_0}(\vec{x}) = f^{p_0+1}(\vec{x}) = \vec{0}$ d'après la question 3.a, nous aurions une contradiction car la question précédente permet de dire que $\lambda\mu f^{p_0-1}(\vec{x}) = \vec{0}$ avec $\lambda\mu \neq 0$. L'absurde vient d'avoir supposé que $p_0 > 1$.

Dans tous les cas, $f(\vec{x}) = \vec{0}$. Nous en déduisons que

$$\boxed{\ker f^p \subset \ker f}$$

d. Si on utilise les questions 3.a et 3.c, nous pouvons déduire que $\ker f = \ker f^p$ pour tout entier $p \geq 1$; nous pouvons donc dire que $\dim \ker f = \dim \ker f^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$ puisque $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie.
La formule du rang, donnant pour tout $k \in \mathbb{N}$, $rg(A^k) = \dim Im(f^k) = n - \dim \ker f^k$, l'égalité que nous venons d'établir permet de conclure que $rg(A)^k = rg(A)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ ce qui est le résultat désiré.

Partie III

1. En toute rigueur, le produit ${}^tV.U$ est un élément de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ qui peut être canoniquement identifié à $\mathbb{R}$. Dans le chapitre concernant les espaces euclidiens, nous avons vu que

$$\boxed{{}^tV.U = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k}$$

2. Il suffit d'effectuer le calcul matriciel en mettant en oeuvre l'associativité des opérations de multiplication en jeu. On a $U.{}^tV \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$\boxed{(U.{}^tV)^2 = (U.{}^tV)(U.{}^tV) = U.({}^tV.U).{}^tV = \underbrace{({}^tV.U)}_{k \in \mathbb{R}} \times U.{}^tV}$$

Et comme $A = aI_n + U.^tV$, on a

$$A^2 \underbrace{=}_{U.^tV \times I_n = I_n \times U.^tV} \left(a^2 I_n + 2aU.^tV + k \times U.^tV\right) = a^2 I_n + (2a+k)\, U.^tV = a^2 I_n + (2a+k)\,(A - aI_n)$$

Ainsi

$$\boxed{A^2 = \underbrace{2a+k}_{\alpha} A + \underbrace{\left(-a^2 - ka\right)}_{\beta} I_n}$$

3. On part du fait que $U.^tV = (u_i \times v_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ pour en déduire que :
   - Si $1 \leq i \leq n$, $a_{i,i} = a + u_i v_i$
   - Si $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ avec $i \neq j$, , $a_{i,j} = u_i v_i$

   Comme $tr(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = n \times a + \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$, on obtient

$$\boxed{\text{tr A = na + } ^tV.U = na + k}$$

4. On a vu que $\alpha = 2a + k$ on trouve $\boxed{\alpha = trA - (n-2)a}$ et $\beta = -a^2 - ka$ donne $\boxed{\beta = -a^2 - a(trA - na) = -a\,(trA - (n-1)a)}$.
5. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, nous savons qu'il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $A.X = \lambda X$. On a donc

$$A^2.X = A.A.X = A.\lambda X = \lambda A.X = \lambda^2 X$$

   donc $\boxed{\text{si } \lambda \in \mathbb{C} \text{ est une valeur propre de } A \text{ alors } \lambda^2 \text{ est une valeur propre de } A^2}$.
   Si désormais $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, on a vu qu'il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $A.X = \lambda X$. On a donc $A^2.X = A.A.X = A.\lambda X = \lambda A.X = \lambda^2 X$ et finalement

$$\lambda^2 X = (\alpha\lambda + \beta)\, X$$

   puisque X est un vecteur non nul, les valeurs propres complexes λ de A vérifient

$$\boxed{\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0}$$

6 Si on considère l'équation $X^2 - \alpha X - \beta = 0$, nous savons qu'elle est égal à

$$X^2 - (trA - (n-2)a)X + a(trA - (n-1)a) = 0$$

ce qui donne

$$(X - a) \times (X - trA + (n-1)a) = 0$$

c'est-à-dire que $\boxed{\text{les deux valeurs propres possibles de } A \text{ sont } a \text{ et } trA - (n-1)a.}$

7. a. La condition $trU^tV \neq 0$ permet de dire que $trA \neq tr\,(aI_n)$ ou encore $trA \neq na$. Sous cette hypothèse, nous considérons deux cas possibles :
   - Si l'une ou l'autre des deux valeurs candidates à être dans le spectre de A ne s'y trouve pas, il s'ensuit que l'espace E_i associé est réduit à $\{0_{n,1}\}$ donc le résultat est trivialement vrai.

- Si au contraire, les deux valeurs propres de A sont exactement les deux racines précédemment trouvées, nous avons deux sous-espaces propres de A associés à des valeurs propres distinctes - car $trA \neq na$ - d'après le cours, ces sous-espaces sont en somme directe et leur intersection se réduit au sous-espace nul.

7.b **Analyse :** si on avait une telle décomposition $X = X_1 + X_2$, nous aurions

$$A.X = aX_1 + (trA - (n-1)a)X_2$$

il en découlerait que $A.X - aX = (trA - na)\, X_2$ et comme $trA \neq na$, nous aurions

$$X_2 = \frac{1}{trA - na}\,(A.X - aX) \text{ et } X_1 = \frac{1}{trA - na}\,((trA - (n-1)a)X - A.X)$$

Synthèse : si nous prenons les deux valeurs définies ci-dessus

$$X_2 = \frac{1}{trA - na}\,(A.X - aX) \text{ et } X_1 = \frac{1}{trA - na}\,((trA - (n-1)a)X - A.X)$$

On vérifie que l'on a :

- $X = X_1 + X_2$
- $AX_2 = \dfrac{1}{trA - na}\left(A^2.X - aA.X\right) = \dfrac{1}{trA - na}\,(\alpha A.X + \beta X - aA.X) =$
  $\dfrac{1}{trA - na}\,((trA - (n-2)a)A.X + (-a(trA - (n-1)a)X - aA.X) =$
  $\dfrac{1}{trA - na}\,((trA - (n-1)a)A.X + (-a(trA - (n-1)a)X) = \dfrac{(trA - (n-1)a)}{trA - na}\,(AX - aX)$
  $= (trA - (n-1)a)X_2$
- Calcul très similaire pour valider que $AX_1 = aX_1$.

Sous l'hypothèse $tr(U^tV) \neq 0$, on a $\boxed{\text{E1 + E}_2 = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

7.c A la question 7.a, nous avons établit que $E_1 \cap E_2$ est l'espace nul : nous pouvons donc en déduire que

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = E_1 \oplus E_2$$

Pour en déduire que A est diagonalisable, nous prenons une base ε_1 de E_1 et une base ε_2 de E_2. La famille $\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car ces espaces sont supplémentaires. Si P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de cette famille, nous aurons $P \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ et $A.P = P.D$ où D est une matrice diagonale. Nous en déduisons que $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$.

8. Pour le voir prendre

$$U = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, a = 2$$

1. a. **Question de cours :** nous savons que l'on a

$$\boxed{\mathrm{P}\;(X > n) = (1-p)^n}$$

Cependant la question suggère d'en donner une démonstration : considérant le système complet d'événements $\{X = k\}_{k\in\mathbb{N}^\star}$, on peut écrire

$$\{X > n\} = \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} \{X = k\}$$

Par σ-additivité, nous avons immédiatement

$$\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = p \sum_{k=n}^{+\infty} (1-p)^k = p\,(1-p)^n\,\frac{1}{p}$$

Commentaire . *peut-être devait-on préciser que l'on admet que T est une* **variable aléatoire** *discrète : le programme de la filière permet à la limite de vérifier que l'on a une VAD, sans aller trop loin cependant.*
J'ajoute qu'il me semble que l'on aurait pu clarifier la situation vis à vis de l'évènement $T = +\infty$ - qui a une probabililité nulle par l'argument classique de continuité décroissante présent au programme.
Dans la suite, on supposera donc que T **est une variable aléatoire réelle discrète***.*

b. On sait que $T = \inf\,(k \geq 1,\; X_k = 1)$: l'univers image de cette variable aléatoire T est $\mathbb{N}^\star$ aussi égal à celui de X.
De plus pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$

$$\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \{X_i = 0\}\right) \cap \{X_k = 1\}) \underbrace{=}_{\text{indép}} p \prod_{i=1}^{k-1} (1-p) = (1-p)^{k-1} p$$

Nous concluons que $\boxed{X \text{ et } T \text{ suivent la même loi.}}$

2.

Commentaire . *Dans le cadre du programme de la filière PT, on emploie le terme de « série génératrice »pour ce que l'énoncé désigne par fonction génératrice.*

a. **Question de cours :** Si X est une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p, on a : $\boxed{\mathrm{G}_X(t) = \dfrac{pt}{1-qt}, \forall t \in]-\dfrac{1}{q}, \dfrac{1}{q}[}$ où $q = 1-p > 0$.

Par ailleurs, vu que les variables X et Y sont supposées suivre la même loi et être indépendantes, on a :

$$\boxed{\mathrm{G}_{X+Y}(t) = G_X(t) \times G_Y(t) = \left(\frac{pt}{1-qt}\right)^2,\; \forall t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[}$$

b. Nous disons d'abord que :

$$\forall t \in]-\frac{1}{q},\frac{1}{q}[,\ \frac{1}{(1-qt)^2}=\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}t^{k-1}$$

par mise en oeuvre du théorème de dérivation terme à terme dans l'intervalle ouvert de convergence, donc

$$\forall t \in]-\frac{1}{q},\frac{1}{q}[,\ \frac{p^2t^2}{(1-qt)^2}=\sum_{k=1}^{+\infty} kp^2q^{k-1}t^{k+1}$$

Il en découle d'après la définition de la série génératrice de $X+Y$, par unicité du développement en série entière en 0 que que

$$\boxed{\forall k \geq 2,\ \mathbb{P}(X+Y=k)=(k-1)p^2(1-p)^{k-2}}$$

c. Pour tout $n \geq 2$, $\mathbb{P}(X+Y=n) \neq 0$ et l'univers image de X est $\{1,\cdots,n-1\}$ car Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$.
Nous écrivons donc que pour tout entier $1 \leq k \leq n-1$

$$\mathbb{P}(X=k|X+Y=n)=\frac{\mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{X+Y=n\})}{\mathbb{P}(X+Y=n)}\underbrace{=}_{indep}\frac{\mathbb{P}(\{X=k\})\times\mathbb{P}(\{Y=n-k\}}{\mathbb{P}(X+Y=n)}$$

Ce qui donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}, (1 \leq k \leq n-1) \Rightarrow \mathbb{P}(X=k|X+Y=n)=\frac{p^2(1-p)^{k-1}\times(1-p)^{n-k-1}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}=\frac{1}{n-1}$$

Nous avons ici une $\boxed{\text{loi uniforme sur } \{1,\cdots,n-1\} \text{ pour tout } n \geq 2.}$

3. a. pour tout couple de réels (x,y), on a :

$$\max(x,y)+\min(x,y)=x+y$$

et

$$\max(x,y)-\min(x,y)=|x-y|$$

adapté à notre problème, nous en déduisons que pour chaque événement élémentaire ω

$$\boxed{X(\omega)+Y(\omega)=T(\omega)+Z(\omega)}$$

et

$$\boxed{|X(\omega)-Y(\omega)|=T(\omega)-Z(\omega)}$$

b. On a la relation

$$\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k,Y=k)\underbrace{=}_{indep}\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=k)=p^2\sum_{k=1}^{+\infty}((1-p)^2)^{k-1}$$

Connaissant la somme d'une série géométrique de raison convenable, nous en déduisons que

$$\mathbb{P}(X=Y)=\frac{p^2}{1-(1-p)^2}=\frac{p}{2-p}=\frac{p}{1+q}$$

c. L'univers image de Z est $\mathbb{N}^\star$ a priori. Pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(k-1 < Z \leq k) = F_Z(k) - F_Z(k-1)$$

La loi de Z ainsi entièrement déterminée par la fonction de répartition de Z. Pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$F_Z(n) = \mathbb{P}(Z \leq n) = 1 - \mathbb{P}(Z > n)$$

et par ailleurs sous les mêmes conditions

$$\mathbb{P}(Z > n) = \mathbb{P}(\{X > n\} \cap \{Y > n\}) \underbrace{=}_{indep} \mathbb{P}(\{X > n\}) \times \mathbb{P}(\{Y > n\}) \underbrace{=}_{1.a} q^{2n}$$

Finalement

$$\forall n \geq 0,\ F_Z(n) = 1 - q^{2n}$$

et

$$\forall k \geq 1,\ \mathbb{P}(Z = k) = (1 - q^{2k}) - (1 - q^{2k-2}) = q^{2(k-1)}(1 - q^2)$$

Nous en déduisons que $\boxed{Z \text{ suit une loi géométrique de paramètre } 1 - q^2 > 0.}$

d. On sait que $T = \max(X, Y)$, nous en déduisons que l'univers image de T est $\mathbb{N}^\star$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$

$$\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(X = k, X \geq Y) + \mathbb{P}(Y = k, Y \geq X) - \mathbb{P}(X = k, X = Y)$$

Avec

$$\mathbb{P}(X = k, X \geq Y) = \mathbb{P}(X = k) \times \mathbb{P}(Y \leq k) = \mathbb{P}(X = k)(1 - \mathbb{P}(Y > k)) = p(1-p)^{k-1}(1-(1-p)^k)$$

et de façon assez similaire :

$$\mathbb{P}(Y = k, X \leq Y) = \mathbb{P}(Y = k) \times \mathbb{P}(X \leq k) = p(1-p)^{k-1}(1 - (1-p)^k)$$

et enfin

$$\mathbb{P}(X = k, X = Y) = \mathbb{P}(X = k) \times \mathbb{P}(Y = k) = \left(p(1-p)^{k-1}\right)^2$$

Nous arrivons alors à

$$\boxed{\text{P(T=k) =2p q}^{k-1}(1 - q^k) - p^2 q^{2k-2}}$$