Problème 1

Partie I — Étude des variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2

I.1— Exemple simple

Q1. La variable $V:\Omega\to\mathbb{R}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre p, ssi $V(\Omega)=\{0,1\}$ et $\mathrm{P}[V=1]=p$. Bien entendu, cela entraîne : $\mathrm{P}[V=0]=1-p$, ce dernier paramètre étant souvent noté q.

Q2. Les variables V et V^2 ne prenant qu'un nombre fini de valeurs (on parle de variable aléatoire finie), elles admettent des espérances $\mathrm{E}[V]$, et $\mathrm{E}[V^2]$ (cours de première année) qui ne sont que des sommes finies. Leur existence ne fait donc pas problème. La question n'est pas posée, mais ces espérance sont faciles à calculer : $\mathrm{E}[V]=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p$ et $\mathrm{E}[V^2]=0^2\cdot(1-p)+1^2\cdot p=p$ également (on a en réalité : $V=V^2$).

I.2— Cadre général

Remarque générale : d'après le cours sur les couples de variables aléatoires, la famille $\left(r_{i,j}\right)$ détermine la loi du couple (X,Y), tandis que les familles $\left(p_i\right)$, et $\left(q_j\right)$, les lois marginales.

Q3. L'égalité $r_{i,j}=p_i\times q_j$ s'écrit $\mathrm{P}[X=x_i,Y=y_j]=\mathrm{P}[X=x_i]\times\mathrm{P}[Y=y_j]$. D'après le cours sur les couples de variables aléatoires, on sait que X,Y sont indépendantes ssi, par définition :

$$r_{i,j}=p_i\times q_j \text{ pour tout couple } (i,j).$$

Q4. D'après la formule de transfert : $\mathrm{E}[f(X)]=\sum_{i=0}^{+\infty}f(x_i)\,\mathrm{P}[X=x_i]$ lorsque cette série converge absolument. C'est le cas si l'on prend $f(t)=t^2$ (puisque $X\in\mathscr{V}_d^2$). On obtient :

$$\mathrm{E}[X^2]=\sum_{i=0}^{+\infty}x_i^2\,\mathrm{P}[X=x_i].\quad \text{De même : } \mathrm{E}[Y^2]=\sum_{j=0}^{+\infty}y_j^2\,\mathrm{P}[Y=y_j].$$

Q5. Utilisons le système complet d'événements associé à la variable Y : pour tout événement A l'on a $\mathrm{P}[A]=\sum_{j=0}^{+\infty}\mathrm{P}[A\cap\left(Y=y_j\right)]$, et en particulier :

$$\mathrm{P}[X=x_i]=\sum_{j=0}^{+\infty}\mathrm{P}[\left(X=x_i\right)\cap\left(Y=y_j\right)]\quad\text{soit :}\quad p_i=\sum_{j=0}^{+\infty}r_{i,j}.$$

Remplaçons donc $\mathrm{P}[X=x_i]=p_i$ par la somme $\sum_{j=0}^{+\infty}r_{i,j}$ dans la formule de la question (Q4), et il vient :

$$\mathrm{E}[X^2]=\sum_{i=0}^{+\infty}x_i^2\,\mathrm{P}[X=x_i]=\sum_{i=0}^{+\infty}\Big(x_i^2\sum_{j=0}^{+\infty}r_{i,j}\Big)=\sum_{i=0}^{+\infty}\Big(\sum_{j=0}^{+\infty}x_i^2\,r_{i,j}\Big)$$

On a de même $\mathrm{P}[Y=y_j]=\sum_{j=0}^{+\infty}\mathrm{P}[\left(Y=y_j\right)\cap\left(X=x_i\right)]$ d'où $q_j=\sum_{i=0}^{+\infty}r_{i,j}$ et alors :

$$\mathrm{E}[Y^2]=\sum_{j=0}^{+\infty}y_j^2\,\mathrm{P}[X=x_i]=\sum_{j=0}^{+\infty}\Big(y_j^2\sum_{i=0}^{+\infty}r_{i,j}\Big)=\sum_{j=0}^{+\infty}\Big(\sum_{i=0}^{+\infty}y_j^2\,r_{i,j}\Big)$$

Q6. Posons $a=|x|$ et $b=|y|$, on a trivialement $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geq 0$. Remplaçons :

il vient $|x|^2+|y|^2-2|x|\,|y|\geq 0$, et donc $|xy|=|x|\,|y|\leq\frac{|x|^2+|y|^2}{2}=\frac{x^2+y^2}{2}$

Q7. Considérons les variables aléatoires $T=XY$ et $Z=\frac{X^2+Y^2}{2}$. Les variables X,Y étant supposées appartenir à $\mathscr{V}_d^2$ (voir le début de la partie I.2), les variables X^2 et Y^2 sont d'espérances finies.

Or, la variable $Z = \frac{1}{2}X^2+\frac{1}{2}Y^2$ est une combinaison linéaire X^2 et Y^2, elle est donc d'espérance finie, avec $\mathrm{E}[Z] = \frac{1}{2}\mathrm{E}[X^2]+\frac{1}{2}\mathrm{E}[Y^2] = \frac{1}{2}\big(\mathrm{E}[X^2] + \mathrm{E}[Y^2]\big)$. C'est la linéarité de l'espérance. Par ailleurs, on a $|T| \leq Z$. Donc on peut appliquer à T le résultat admis. On obtient : l'espérance de $T = XY$ existe, et :

$$\mathrm{E}[T] \leq \mathrm{E}[Z] = \frac{1}{2}\big(\mathrm{E}[X^2] + \mathrm{E}[Y^2]\big)$$

Q8. Soit donc X, Y deux variables aléatoires appartenant à $\mathscr{V}_d^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question (Q6) : $\big(X + \lambda Y\big)^2 = X^2 + \lambda^2Y^2 + 2X\lambda Y \leq X^2 + \lambda^2Y^2 + 2|\lambda||XY|$

$$\leq X^2 + \lambda^2Y^2 + 2|\lambda|\frac{X^2+Y^2}{2} = X^2 + \lambda^2Y^2 + |\lambda|(X^2+Y^2)$$

$$\leq \big(1+|\lambda|\big)X^2 + \big(\lambda^2+|\lambda|\big)Y^2$$

Posons $T = \big(X+\lambda Y\big)^2$ et $Z = \big(1+|\lambda|\big)X^2 + \big(\lambda^2+|\lambda|\big)Y^2$: on a $0 \leq T \leq Z$ et Z est d'espérance finie. Il suffit alors d'appliquer de nouveau le résultat admis à la question précédente. On obtient :

$$\forall X, Y \in \mathscr{V}_d^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad X+\lambda Y \in \mathscr{V}_d^2$$

On a montré que $\mathscr{V}_d^2$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des variables aléatoires réelles.

I.3— Artifice de calcul : utilisation de la loi certaine

Q9. L'ensemble image de Z est $Z(\Omega) = \{1\}$. La loi de Z est définie par : $\mathrm{P}[Z=1] = 1$.

Q10. On a alors, par la formule de transfert pour une variable finie :

$$\mathrm{E}[Z^2] = \sum_{i=1}^{1} 1^2 \cdot \mathrm{P}[Z=1] = 1^2 \cdot \mathrm{P}[Z=1] = 1$$

On a bien $Z \in \mathscr{V}_d^2$. Notons que c'est aussi le cas de toute variable finie.

Q11. Posons $Y_1 = Z$, le résultat de la question (Q7) est : XY_1 est d'espérance finie, et

$$\mathrm{E}[XY_1] \leq \frac{1}{2}\big(\mathrm{E}[X^2] + \mathrm{E}[Y_1^2]\big).$$

Or la fonction $Y_1 = Z$ est la constante 1, et on a vu à la question (Q10) : $\mathrm{E}[Z^2] = 1$. On a obtenu que X est d'espérance finie, et que l'on a :

$$\mathrm{E}[X] \leq \frac{1}{2}\big(\mathrm{E}[X^2] + 1\big)$$

Q12. Dans le cas de variables aléatoires finies, on a :

$$\big(X-\mathrm{E}[X]\big)\big(Y-\mathrm{E}[Y]\big) = XY - \mathrm{E}[X]Y - \mathrm{E}[Y]X + \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$$

Alors : $\mathrm{E}\Big[\big(X-\mathrm{E}[X]\big)\big(Y-\mathrm{E}[Y]\big)\Big] = \mathrm{E}\Big[XY - \mathrm{E}[\mathrm{E}[X]Y - \mathrm{E}[Y]X + \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]\Big]$, et par linéarité :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big[\big(X-\mathrm{E}[X]\big)\big(Y-\mathrm{E}[Y]\big)\Big] &= \mathrm{E}\Big[XY - \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[X]Y\big] - \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[Y]X\big] + \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]\big]\Big] \\
&= \mathrm{E}\big[XY\big] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}\big[Y\big] - \mathrm{E}[Y]\,\mathrm{E}\big[X\big] + \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]\,\mathrm{E}\big[1\big] \\
&= \mathrm{E}\big[XY\big] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] - \mathrm{E}[Y]\,\mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] \quad \text{car } \mathrm{E}[1] = 1 \\
&= \mathrm{E}\big[XY\big] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]
\end{aligned}$$

Q13. Soit X, Y deux variables aléatoires appartenant à $\mathscr{V}_d^2$, la question Q7 donne que XY est d'espérance finie, et la question (Q11) donne que X, et aussi Y, sont d'espérances finies. Alors leur covariance existe.

Partie II — Étude de la matrice de covariance

II.1— Étude d'un exemple

Q14. Soit la formule des probabilités totales, pour le système complet d'événements $(V_3=0)$, $(V_3=1)$:

$$\mathrm{P}[(V_1=i)\cap(V_2=j)] = \mathrm{P}[(V_1=i)\cap(V_2=j)\cap(V_3=0)] + \mathrm{P}[(V_1=i)\cap(V_2=j)\cap(V_3=1)]$$

On en déduit la loi du couple $\left(V_1, V_2\right)$:

$$\mathrm{P}[(V_1=0)\cap(V_2=0)] = 0+0 = 0, \qquad \mathrm{P}[(V_1=0)\cap(V_2=1)] = 0+p_1 = p_1$$
$$\mathrm{P}[(V_1=1)\cap(V_2=0)] = 0+p_2 = p_2 \qquad \mathrm{P}[(V_1=1)\cap(V_2=1)] = p_3+0 = p_3$$

— Calculons la loi de V_1 : $\quad \mathrm{P}[(V_1=i)] = \mathrm{P}[(V_1=i)\cap(V_2=0)] + \mathrm{P}[(V_1=i)\cap(V_2=1)]$, d'où :

$$\mathrm{P}[(V_1=0)] = 0+p_1 = p_1, \qquad \mathrm{P}[(V_1=1)] = p_2+p_3 = 1-p_1$$

La variable V_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre $1-p_1$.

— Puis la loi de V_2 : $\quad \mathrm{P}[(V_2=j)] = \mathrm{P}[(V_1=0)\cap(V_2=j)] + \mathrm{P}[(V_1=1)\cap(V_2=j)]$, d'où

$$\mathrm{P}[(V_2=0)] = 0+p_2 = p_2, \qquad \mathrm{P}[(V_2=1)] = p_1+p_3 = 1-p_2$$

La variable V_2 suit la loi de Bernoulli de paramètre $1-p_2$.

— Pour la loi de V_3 : $\mathrm{P}[(V_3=k)] = \mathrm{P}[(V_1=0)\cap(V_2=0)\cap(V_3=k)] + \mathrm{P}[(V_1=0)\cap(V_2=1)\cap(V_3=k)]$
$+\mathrm{P}[(V_1=1)\cap(V_2=0)\cap(V_3=k)] + \mathrm{P}[(V_1=1)\cap(V_2=1)\cap(V_3=k)]$

D'où $\quad \mathrm{P}[(V_3=0)] = 0+0+0+p_3 = p_3 \quad$ et $\quad \mathrm{P}[(V_3=1)] = 0+p_1+p_2+0 = 1-p_3$

La variable V_3 suit la loi de Bernoulli de paramètre $1-p_3$.

Q15. Posons $S = V_1 + V_2 + V_3$. Calculons la probabilité demandée :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}[S=2] &= \mathrm{P}[(V_1=1)\cap(V_2=1)\cap(V_3=0)] + \mathrm{P}[(V_1=1)\cap(V_2=0)\cap(V_3=1)] + \mathrm{P}[(V_1=0)\cap(V_2=1)\cap(V_3=1)]\\ &= p_3+p_2+p_1 = 1.\end{aligned}$$

<u>Calcul de la variance</u>

On en déduit : $\quad \mathrm{P}[S=0] = 0, \quad \mathrm{P}[S=1] = 0, \quad \mathrm{P}[S=3] = 0.$

On a $S(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ donc pour toute fonction f, par la formule de transfert :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[f(S)] &= f(0)\mathrm{P}[S=0] + f(1)\mathrm{P}[S=1] + f(2)\mathrm{P}[S=2] + f(3)\mathrm{P}[S=3]\\ &= f(2)\mathrm{P}[S=2]\end{aligned}$$

En particulier $\mathrm{E}[S] = 2$ et $\mathrm{E}[S^2] = 4$, d'où $\mathrm{var}[S] = 0$.

Q16. Admettons que $\mathrm{var}[V_1] = (1-p_1)p_1$ (c'est du cours). De même que $\mathrm{E}[V_1] = p_1$ et $\mathrm{E}[V_2] = p_2$.
Calculons la covariance du couple $\left(V_1, V_2\right)$: $\quad \mathrm{cov}[V_1V_2] = \mathrm{E}[V_1V_2] - \mathrm{E}[V_1]\mathrm{E}[V_2]$. Utilisons la formule de transfert : $\mathrm{E}[V_1V_2] = \mathrm{E}[f(V_1,V_2)]$ pour $f(x,y) = xy$ et donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[V_1V_2] &= \sum_{i,j} f(i,j)\,\mathrm{P}[(V_1=i)\cap(V_2=j)] = \sum_{i,j} ij\ \mathrm{P}[(V_1=i)\cap(V_2=j)]\\ &= 0\mathrm{P}[(V_1=0)\cap(V_2=0)] + 0\mathrm{P}[(V_1=0)\cap(V_2=1)] + 0\mathrm{P}[(V_1=1)\cap(V_2=0)] + 1\,\mathrm{P}[(V_1=1)\cap(V_2=1)]\\ &= 0+0+0+p_3 = p_3\end{aligned}$$

Alors : $\qquad \mathrm{cov}\left(V_1, V_2\right) = p_3 - (1-p_1)(1-p_2) = p_3 - 1 + p_1 + p_2 - p_1p_2 = -\,p_1p_2 \quad$ (*)

Q17. De même qu'à la question précédente, on aura :

$\mathrm{var}[V_2] = (1-p_2)p_2$, $\mathrm{var}[V_3] = (1-p_3)p_3$, et aussi $\mathrm{cov}\left(V_1, V_3\right) = -\,p_1p_3$, $\mathrm{cov}\left(V_2, V_3\right) = -\,p_2p_3 \quad$ (**)

Enfin d'après la définition (1) de la covariance, on a $\mathrm{cov}\left(X, Y\right) = \mathrm{cov}\left(Y, X\right)$. On en déduit que la matrice K est symétrique : cette matrice est donc complètement précisée.

Réduction de la matrice K dans un cas particulier

Q18. Notons U ce vecteur colonne, il vient :

$$KU = \left| \begin{array}{l} p_1(1-p_1)-p_1p_2-p_1p_3 = p_1-p_1(p_1+p_2+p_3) = 0 \\ p_2(1-p_2)-p_1p_2-p_2p_3 = p_2-p_2(p_1+p_2+p_3) = 0 \\ p_3(1-p_3)-p_1p_3-p_2p_3 = p_3-p_3(p_1+p_2+p_3) = 0 \end{array} \right.$$

Donc U est un vecteur propre, associé à la valeur propre 0.

Q19. D'après la question précédente, $\dim \ker K = 1$ ou 2. Alors le rang de K vaut 2 ou 1. Si le rang était 1, les colonnes seraient proportionnelles. On aurait en particulier, en l'écrivant pour les deux premières colonnes : $\begin{vmatrix} p_1(1-p_1) & -p_1p_2 \\ -p_1p_2 & p_2(1-p_2) \end{vmatrix} = 0$. Or ce déterminant vaut :

$$p_1p_2(1-p_1)(1-p_2) - p_1^2p_2^2 = p_1p_2[1-p_1-p_2] = p_1p_2p_3 \neq 0$$

C'est donc que la rang de K vaut 2. On en déduit que $\dim \ker K = 1$, d'où $\ker K = \mathrm{vect}(U)$.

Q20. Écrivons la matrice K dans la cas particulier où $p_2 = p_3 = p$:

$$K = \begin{pmatrix} p_1(1-p_1) & -p_1p & -p_1p \\ -p_1p & p(1-p) & -p^2 \\ -p_1p & -p^2 & p(1-p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p-4p^2 & 2p^2-p & 2p^2-p \\ 2p^2-p & p-p^2 & -p^2 \\ 2p^2-p & -p^2 & p-p^2 \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 2-4p & 2p-1 & 2p-1 \\ 2p-1 & 1-p & -p \\ 2p-1 & -p & 1-p \end{pmatrix}$$

Considérons le vecteur $V = [0, 1, -1]^{\mathrm{T}}$:

$$KV = \left| \begin{array}{l} -p_1p + p_1p = 0 \\ p(1-p) + p^2 = p \\ -p^2 - p(1-p) = -p \end{array} \right. \quad \text{et donc} \quad KV = pV$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre p est le noyau de la matrice :

$$K - p\mathrm{I} = p\begin{pmatrix} 1-4p & 2p-1 & 2p-1 \\ 2p-1 & -p & -p \\ 2p-1 & -p & -p \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 2p_1-1 & 2p-1 & 2p-1 \\ -p_1 & -p & -p \\ -p_1 & -p & -p \end{pmatrix}$$

Le rang de cette matrice vaut 2 pour $p_1 \neq p$, et vaut 1 si $p_1 = p$ (i.e. $p = p_1 = 1/3$).

Q21. La trace de K est égale à $\mathrm{Tr}\, K = 4p - 6p^2$. C'est la somme des trois valeurs propres réelles de K, comptées avec leurs multiplicités. Nous connaissons les valeurs propres $0, p$ donc il reste une valeur propres inconnue, que nous noterons λ :

$$\lambda = 3p - 6p^2 = 3pp_1, \quad \text{on a donc} \quad \chi_K(X) = X(X-p)(X-3pp_1).$$

II.2 — Retour au cas général

Q22. Nous avons déjà justifié que la matrice K est symétrique, et notre argument était général. Par ailleurs elle est aussi réelle, donc elle est diagonalisable.

Q23. On sait développer la variance d'une somme :

$$\mathrm{var}(x_1V_1+x_2V_2+x_3V_3) = \mathrm{cov}(x_1V_1+x_2V_2+x_3V_3, x_1V_1+x_2V_2+x_3V_3) = \sum_{1 \le i,j \le 3} x_ix_j\mathrm{cov}(V_i, V_j)$$

Et puisqu'une variance est toujours positive, il vient :

$$\text{pour tout } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \text{on a} \quad \sum_{1 \le i,j \le 3} x_ix_j\mathrm{cov}(V_i, V_j) \ge 0$$

Q24. Pour tout vecteur $X = [x_1 \;\; x_2 \;\; x_3]^{\mathrm{T}}$, on a donc : $X^{\mathrm{T}}KX \ge 0$. En particulier, si $KX = \lambda X$ avec $X \neq 0$ (vecteur propre), on a : $\langle X \mid KX \rangle = X^{\mathrm{T}}KX \ge 0$. Or, $\langle X \mid KX \rangle = \langle X \mid \lambda X \rangle = \lambda \|X\|^2 \ge 0$. Puisque $X \neq 0$, il vient : $\lambda \ge 0$.

Problème 2

Partie I — Résolution dans le cas $\mu = 0$

Q25. $f : x \mapsto \arcsin(2x-1)$ est définie au point x, ssi $-1 \leq 2x-1 \leq 1$, et l'on obtient : $0 \leq x \leq 1$.
Posons $\varphi : x \mapsto 2x-1$, la fonction φ est continue sur $I = [0,1]$, on a $\varphi(I) = [-1,1]$, et enfin arcsin est continue sur $J = \varphi(I)$. Alors par composition, $f = \arcsin \circ \varphi$ est continue sur $I = [0,1]$.

De même, φ est dérivable sur $\tilde{I} =]0,1[$, on a $\varphi(\tilde{I}) =]-1,1[$, et enfin arcsin est dérivable sur $\tilde{J} = \varphi(\tilde{I})$. Alors par composition, $f = \arcsin \circ \varphi$ est dérivable sur $\tilde{I} =]0,1[$, et se dérive avec la formule :

$$\begin{aligned}\forall x \in]0,1[, \quad f'(x) &= \arcsin'\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{4x-4x^2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\end{aligned}$$

Q26. Si une fonction y est constante sur $]0,1[$, alors on a $y'(x) = y''(x)$ pour tout $x \in]0,1[$, et donc l'égalité $16(x^2-x)y'' + (16x-8)y' = 0$ est vérifiée. La fonction y est une solution de (E_0) sur $]0,1[$.

Q27. Réduisons au même dénominateur :

$$\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1} = \frac{x-1/2}{x(x-1)} = \frac{16x-8}{16x(x-1)} = \frac{16x-8}{16(x^2-x)}$$

Q28. L'équation (E_0) peut, sur l'intervalle $]0,1[$, s'écrire sous forme résolue :

$$y'' + \frac{16x-8}{16(x^2-x)} y' = 0\,.$$

L'équation (E_0) est donc également équivalente à :

$$z' + \frac{16x-8}{16(x^2-x)} z = 0 \quad \text{et} \quad z = y'$$

En utilisant la question précédente, on obtient la forme attendue :

$$(E^\star) \;:\; z' + \Big(\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1}\Big) z = 0 \quad \text{et} \quad z = y'$$

Q29. L'équation $(E^\star)$ est linéaire scalaire homogène du premier ordre. Posons $a(x) = \dfrac{1/2}{x} + \dfrac{1/2}{x-1}$, une primitive sur $]0,1[$ est $A(x) = \dfrac{1}{2}\ln x + \dfrac{1}{2}\ln|x-1| = \dfrac{1}{2}\ln x + \dfrac{1}{2}\ln(1-x)$. Alors les solutions de $(E^\star)$ sur $]0,1[$ sont les fonctions : $\varphi_A : x \mapsto C\mathrm{e}^{-A(x)} = A\,x^{-1/2}(1-x)^{-1/2} = \dfrac{A}{\sqrt{x(1-x)}}$ pour un $A \in \mathbb{R}$.

Q30. D'après la question (Q28), les solutions de (E_0) sur $]0,1[$ sont les fonction y vérifiant :

$$z = y' \text{ est solutions de } (E^\star) \text{ sur }]0,1[$$

Ce sont les fonction y telles que :

$$\text{il existe } A \in \mathbb{R}, \quad y'(x) = \frac{A}{\sqrt{x(1-x)}} = A\,f'(x)$$

On conclut facilement : les solutions de (E_0) sur $]0,1[$ sont les fonctions :

$$f_{A,B} : x \mapsto A\,f(x) + B = A\arcsin(2x-1) + B \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R}$$

Partie II — Recherche d'une solution particulière dans le cas $\mu = 0$

Q31. Rappelons le cours sur les séries entières :

(C) *La somme* $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *d'une série entière est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence, ici* $]-R, R[$*. De plus, la fonction dérivée s'obtient en dérivant terme à terme :* $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n x^{n-1}$*, et cette série entière a également* R *pour rayon de convergence.*

Montrons par récurrence que y est de classe C^∞, c'est-à-dire indéfiniment dérivable, sur $]-R, R[$: nous montrons, de façon précise : $\left[\forall k \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(k)\right]$

où $\mathscr{P}(k)$ est la propriété : « la dérivée k-ième $y^{(k)}(x)$ existe sur $]-R, R[$ et est somme d'une série entière $y^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, et dont le rayon de convergence est R ».

— Notre rappel de cours initialise cette récurrence.

— Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Supposons : « $y^{(k)}(x)$ existe sur $]-R, R[$ et soit somme d'une série entière $y^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, le rayon de convergence de cette série étant exactement R ».

Appliquons le théorème (C) : la fonction $y^{(k)}$ étant la somme d'une série entière elle est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$, sa dérivée s'obtient en dérivant terme à terme, et est donc somme de la série entière dérivée qui est aussi de rayon R.

Cette fonction dérivée est $y^{(k+1)}$: nous avons montré la propriété au rang $k+1$.

Q32. Soit une fonction $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, somme d'une série entière de rayon R. En appliquant (Q31) :

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \qquad x\,y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n\, a_n x^n, \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$x\,y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n\, a_{n+1} x^n, \qquad x^2 y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n$$

À l'aide ces expressions, nous allons pouvoir exprimer le premier membre de l'équation (E_μ) comme la somme d'une série entière :

$$\begin{aligned}
16(x^2-x)\,y'' + (16x-8)\,y' - \mu y &= 16x^2 y'' - 16x\,y'' + 16x\,y' - 8y' - \mu y \\
&= 16\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - 16\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n\, a_{n+1} x^n + 16\sum_{n=0}^{+\infty} n\, a_n x^n - 8\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \mu \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[16n(n-1) a_n x^n - 16(n+1) n\, a_{n+1} + 16 n\, a_n - 8(n+1) a_{n+1} - \mu\, a_n\right] x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(16n^2-\mu)\, a_n - 8(n+1)(2n+1) a_{n+1}\right] x^n
\end{aligned}$$

La fonction y est donc solution de (E_μ), ssi $\sum_{n=0}^{+\infty} \left[(16n^2-\mu)\, a_n - 8(n+1)(2n+1) a_{n+1}\right] x^n = 0.$

Q33. Par unicité des coefficients d'une série entière, si y est solution de (E_μ), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (16n^2-\mu)\, a_n - 8(n+1)(2n+1) a_{n+1} = 0$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{(16n^2-\mu)}{8(n+1)(2n+1)}\, a_n = \frac{(16n^2-\mu)}{4(2n+2)(2n+1)}\, a_n \qquad (\,^\ast\,)$$

On en déduit :

$$a_{n+1} = a_0 \prod_{k=0}^{n} \frac{(16k^2-\mu)}{4(2k+2)(2k+1)} = a_0 \frac{\prod_{k=0}^{n}(16k^2-\mu)}{\prod_{k=0}^{n} 4(2k+2)(2k+1)} = a_0 \frac{\prod_{k=0}^{n}(16k^2-\mu)}{4^{n+1}(2n+2)!}$$

Ou encore, par simple décalage d'indice :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^\star, \quad a_n = a_0 \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(16k^2-\mu)}{4^n(2n)!} \qquad (**)$$

Q34. Si $a_0=0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n=0$. La fonction y est la fonction nulle, somme de la série entière nulle de rayon de convergence $+\infty$.

Q35. Si $a_0 \neq 0$ et $\mu = 16p^2$ pour un entier p, on a $a_n = a_0 \dfrac{\prod_{k=0}^{n-1}(16k^2-\mu)}{4^n(2n)!}$ pour tout $n \in [\![1, p-1]\!]$.

Au rang $n=p$, la formule $(*)$ donne $a_p=0$ d'abord, et ensuite : $\forall n \geq p, \quad a_n=0$. Dans ce cas, toute solution développable en série entière est un polynôme de degré $p-1$, et ces solutions forment une droite.

Q36. Si $a_0 \neq 0$ et μ n'est pas de la forme $\mu = 16p^2$, alors $a_n = a_0 \dfrac{\prod_{k=0}^{n-1}(16k^2-\mu)}{4^n(2n)!}$ pour tout n.

Cherchons le rayon de convergence de cette série entière, et pour cela posons $u_n = a_n x^n$.

D'après $(*)$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x|$, et donc en utilisant le théorème de D'Alembert :

- Si $|x|<1$, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge absolument,
- Si $|x|>1$, la série numérique $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement.

On en déduit : $R=1$.

Partie III — Étude d'une solution particulière

Dans cette partie, on a $a_0=1$, $\mu=1$, et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{(16n^2-1)}{4(2n+2)(2n+1)}\, a_n \quad (*) \qquad ; \qquad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(16k^2-1)}{4^n(2n)!} \quad (**)$$

Q37. En reprenant (**), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(16k^2-1)}{4^n(2n)!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)(4k+1)}{4^n(2n)!} \qquad (***)$$

Q38. Notons P_n le produit des entiers pairs, I_n le produit des entiers impairs, compris entre 1 et $4n$, de façon que $(4n)! = P_n I_n$. Pour le produit des pairs, on a $P_n = 2\ldots(4n) = 2^{2n}\, 1\ldots(2n) = 2^{2n}(2n)!$.

Considérons ensuite le produit :

$$Q_n = (4n-1) \times \prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)(4k+1) = -1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4n-5) \cdot (4n-3) \times (4n-1) = -I_n$$

On a donc :

$$(4n)! = P_n I_n = 2^{2n}(2n)! \cdot (-Q_n) = -\,2^{2n}(2n)!(4n-1) \times \prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)(4k+1)$$

Q39. Poursuivons le calcul de la question précédente : $(4n)! = -\,2^{2n}(2n)!(4n-1)\times\prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)(4k+1)$

donne $\prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)(4k+1) = \dfrac{-(4n)!}{2^{2n}(2n)!(4n-1)}$. En remplaçant dans l'expression (***) de a_n :

$$a_n = \frac{-(4n)!}{2^{2n}(2n)!(4n-1)}\,\frac{1}{4^n(2n)!} = \frac{-(4n)!}{4^{2n}(2n)!^2(4n-1)}$$

Q40. À l'aide de la formule de Stirling : $(4n)! \sim \mathrm{e}^{-4n}(4n)^{4n}\sqrt{2\pi 4n} = \mathrm{e}^{-4n}4^{4n}n^{4n}\,2\sqrt{2\pi n}$, puis $(2n)! \sim \mathrm{e}^{-2n}(2n)^{2n}\sqrt{2\pi 2n}$, $(2n)!^2 \sim \mathrm{e}^{-4n}(2n)^{4n}\,2\pi 2n = \mathrm{e}^{-4n}4^{2n}n^{4n}\,2\pi 2n$ (on a bien $2^{4n} = 4^{2n}$).

Alors :

$$a_n = \frac{-(4n)!}{4^{2n}(2n)!^2(4n-1)} \sim \frac{-\mathrm{e}^{-4n}4^{4n}n^{4n}\,2\sqrt{2\pi n}}{4^{2n}\mathrm{e}^{-4n}4^{2n}n^{4n}\,2\pi 2n\;4n} = \frac{-\sqrt{n}}{4\sqrt{2\pi}\,n^2} = \frac{-1}{4\sqrt{2\pi}\,n^{3/2}}$$

Q41. Nous avions trouvé pour rayon de convergence $R=1$ (question Q36).

Étudions la convergence des séries numériques $\sum a_n 1^n = \sum a_n$et $\sum a_n(-1)^n$: la série $\sum a_n$ converge, puisque la série de Riemann) $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge. Nos deux séries numériques convergent absolument.

Q42. La fonction φ, somme de la série entière $\sum a_n x^n$ étudié ci-dessus, est donc une fonction dérivable sur $]-1,1[$. La série entière $\sum a_n x^n$ vérifie la condition de la question (Q32) pour $\mu=1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(16n^2-\mu)\,a_n - 8(n+1)(2n+1)a_{n+1}\right]x^n = 0.$$

Alors, d'après le résultat de cette question, la fonction somme φ est solution de (E_1) sur l'intervalle $]-1,1[$. Pour conclure, il reste à justifier la solution φ n'est pas la fonction nulle. Or, $\varphi(0)=a_0=1$ est non nul.