Dans les parties I et II, un vecteur $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ est fixé. Afin d'alléger les notations, nous ne noterons pas ce vecteur systématiquement en indice des applications linéaires et des formes.

Cette lourdeur dans les notations de l'énoncé n'est pas gratuite : elle prendra tout son sens dans les parties suivantes, où plusieurs vecteurs sont considérés simultanément.

I — Préliminaires

I-A Endomorphisme associé à un produit vectoriel

Q1. Le produit vectoriel est une application bilinéaire, donc linéaire à droite : g est linéaire.
Par ailleurs c'est une application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même. C'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Enfin, g n'est pas l'application nulle : si $\overrightarrow{v}$ est un vecteur unitaire appartenant à P_0, montrons que $g(\overrightarrow{v}) \neq \overrightarrow{0}$.
On sait que $\|g(\overrightarrow{v})\| = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \, \sin(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$ (cours de géométrie dans l'espace). Puisque les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ sont orthogonaux on a $\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}} = \frac{\pi}{2}$ (écart angulaire), et donc : $\|g(\overrightarrow{v})\| = \|\overrightarrow{u}\| \neq 0$.

Q2. Noyau de g : $\quad x \in \ker g \quad$ ssi $\quad \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}, \quad$ ssi $\quad \overrightarrow{x} \in \operatorname{vect}(\overrightarrow{u})$.
On a montré :
$$\ker g = \Delta_0.$$

Image de g : Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $g(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$, d'où : $\operatorname{Im} g \subset \mathrm{P}_0$. Par ailleurs, le théorème du rang donne $\operatorname{rg}(g) = 2$, et le théorème du supplémentaire donne $\dim \mathrm{P}_0 = 2$. Ainsi $\operatorname{Im} g$, P_0 sont deux s.e.v., on a $\operatorname{Im} g \subset \mathrm{P}_0$ et on a $\dim \operatorname{Im} g = \dim \mathrm{P}_0$. On en déduit (théorème des deux s.e.v.) :
$$\operatorname{Im} g = \mathrm{P}_0.$$

Q3. Soit un vecteur $\overrightarrow{x}$ et un scalaire λ vérifiant $g(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{x}$.
On a $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x} = \lambda \overrightarrow{x}$ donc en particulier $\lambda \overrightarrow{x}$ est orthogonal à $\overrightarrow{x}$: $\langle \lambda \overrightarrow{x} | \overrightarrow{x} \rangle = 0$, ou encore $\lambda \|\overrightarrow{x}\|^2 = 0$.
On a donc : $\lambda = 0 \quad$ ou $\quad \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.
— Si $\lambda \neq 0$, alors il vient $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, l'ensemble des solutions est donc $\{\overrightarrow{0}\}$.
— Si $\lambda = 0$, l'équation est $g(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$ et les solutions constituent le noyau de g. Or on a vu : $\ker g = \Delta_0$ (Q2).

Q4. En termes d'éléments propres :
— Aucun réel non nul n'est valeur propre.
— Le scalaire 0 est valeur propre et le sous-espace propre correspondant est $\ker g = \Delta_0$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que g soit diagonalisable. Cela signifie que le polynôme caractéristique de g est scindé, et que pour toute valeur propre λ, sa multiplicité m_λ dans χ_g est égale à la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(g)$. Ici, g a une unique valeur propre $\lambda = 0$, on a donc $\chi_g(X) = (X-\lambda)^3 = X^3$. On aurait $\dim E_0(g) = 3$, c'est-à-dire que tout vecteur serait propre pour la valeur propre zéro : tout vecteur serait d'image nulle. C'est absurde, puisque nous avons justifié plus haut que g n'est pas l'application nulle (question Q1).

Q5. La matrice de g dans la base canonique $\mathscr{E}$ de $\mathbb{R}^3$, est la matrice dont les colonnes sont respectivement $g(\vec{i})$, $g(\vec{j})$, $g(\vec{k})$. Il suffit donc de calculer :
$$g(\vec{i}) = \overrightarrow{u} \wedge \vec{i} \begin{vmatrix} 0 \\ \gamma \\ -\beta \end{vmatrix}, \quad g(\vec{j}) = \overrightarrow{u} \wedge \vec{j} \begin{vmatrix} -\gamma \\ 0 \\ \alpha \end{vmatrix}, \quad g(\vec{k}) = \overrightarrow{u} \wedge \vec{k} \begin{vmatrix} \beta \\ -\alpha \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \text{d'où} \quad G_{\overrightarrow{u}} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Q6. La question est triviale, si on se souvient que $\operatorname{Im}(g) = \mathrm{P}_0$ (question Q2). En effet, pour tout $\overrightarrow{v} \in \mathrm{P}_0$, on a évidemment $g(\overrightarrow{v}) \in \operatorname{Im}(g)$, et donc $g(\overrightarrow{v}) \in \mathrm{P}_0$.

> Si la question Q2 n'a pas été traitée, on peut obtenir que $\operatorname{Im}(g) = \mathrm{P}_0$ grâce à la matrice $G_{\overrightarrow{u}}$ ci-dessus. En effet, il suffit de remarquer que les trois vecteurs $g(\vec{i})$, $g(\vec{j})$, $g(\vec{k})$ i.e. les trois colonnes de la matrice $G_{\overrightarrow{u}}$, sont orthogonaux au vecteur $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ (on le vérifie « à vue »).

Q7. Puisque le plan P_0 est stable par g, cette application définit bien un endomorphisme de P_0 :
$$\tilde{g} : \overrightarrow{x} \in \mathrm{P}_0 \mapsto g(\overrightarrow{x}) \in \mathrm{P}_0$$
Puisque $\overrightarrow{v}_1 = (\beta, -\alpha, 0)$ appartient à P_0, on peut poser $\overrightarrow{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \overrightarrow{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} (\beta, -\alpha, 0)$. De façon que $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{u}')$ soit une B.O.N. directe de $\mathbb{R}^3$, où $\overrightarrow{u}' = \frac{1}{\nu} \overrightarrow{u}$, $\nu = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} = \|\overrightarrow{u}\|$ (lire « nu »), il est nécessaire et suffisant d'avoir $\overrightarrow{e}_2 = \overrightarrow{u}' \wedge \overrightarrow{e}_1$.

Calculons donc :
$$\overrightarrow{u}' \wedge \overrightarrow{e}_1 = \frac{1}{\nu\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \cdot \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \beta \\ -\alpha \\ 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{e}_2 \begin{vmatrix} \alpha\gamma \\ \beta\gamma \\ -\alpha^2-\beta^2 \end{vmatrix} \; \frac{1}{\nu\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

Déterminons enfin la matrice de $\tilde{g}$ dans la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ du plan P_0, c'est-à-dire qu'il nous faut calculer :

$$g(\overrightarrow{e}_1) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{e}_1 = \nu \overrightarrow{u}' \wedge \overrightarrow{e}_1 = \nu \overrightarrow{e}_2 \text{ (voir plus haut), et } g(\overrightarrow{e}_2) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{e}_2 = \nu\, \overrightarrow{u}' \wedge \overrightarrow{e}_2 = -\nu \overrightarrow{e}_1 .$$

Les matrices respectives de $\tilde{g}$ et $\frac{1}{\nu}\tilde{g}$ dans la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$, sont donc $\tilde{G} = \begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{\nu}\tilde{G} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Puisqu'elles représentent $\tilde{g}$ et $\frac{1}{\nu}\tilde{g}$ dans une base orthonormée, on peut à bon droit reconnaître la matrice de la rotation plane d'angle orienté $+\frac{\pi}{2}$ (on dit parfois que $\frac{1}{\nu}\tilde{g}$ est le « quart de tour direct » du plan).

Q8. Nous l'avons déjà utilisé, puisque c'est du cours : dans un espace euclidien, un s.e.v. F et son orthogonal $F^{\perp}$ sont des supplémentaires (on peut préciser : « supplémentaires orthogonaux »).

Mais ici, il faut bien comprendre que l'énoncé demande de redémontrer ce résultat. Détaillons donc ce point :
– On a $\mathrm{P}_0 \cap \Delta_0 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$: si $\overrightarrow{x} \in \mathrm{P}_0 \cap \Delta_0$, on a $\|\overrightarrow{x}\|^2 = \langle \overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x} \rangle = 0$ puisque $\mathrm{P}_0 \perp \Delta_0$. Alors $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.
– On a $\dim \Delta_0 + \dim(\Delta_0)^{\perp} = 3$ d'après le cours, d'où $\dim \Delta_0 + \dim \mathrm{P}_0 = 3$.
Alors (caractérisation des supplémentaires en dimension finie) : on a $\mathrm{P}_0 \oplus \Delta_0 = \mathbb{R}^3$.

—> On peut aussi utiliser, dans le cas particulier de cet exercice, le critère de « réunion » des bases : en effet $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ est une base de P_0, $(\overrightarrow{u})$ est une base de Δ_0, et nous savons, par construction, que $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{u})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On a $g(\overrightarrow{e}_1) = \nu \overrightarrow{e}_2$, $g(\overrightarrow{e}_2) = -\nu \overrightarrow{e}_1$, et $g(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$, donc la matrice de g dans $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{u})$ est $\begin{pmatrix} 0 & -\nu & 0 \\ \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

I-B Cas particulier d'opérateur d'inertie pour un solide ponctuel

Q9. Calculons donc la matrice F : $\quad F = -G^2 = \begin{pmatrix} -c^2-b^2 & ab & ac \\ ab & -c^2-a^2 & bc \\ ac & bc & -b^2-a^2 \end{pmatrix}$.

Cette matrice est symétrique réelle, alors (sans calcul de polynôme caractéristique ni de noyau) on sait qu'elle est ortho-diagonalisable : autrement dit, il existe une base orthonormée de vecteurs propres.
Sous cette forme, c'est aussi vrai pour f : il existe une base orthonormée de vecteurs propres.

Q10. Comparons donc l'application f avec $\phi : x \mapsto \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{x} - \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{x} \rangle \overrightarrow{u}$. L'application ϕ est linéaire :

$$\begin{aligned} \phi(\overrightarrow{x} + \lambda \overrightarrow{y}) &= \|\overrightarrow{u}\|^2 (\overrightarrow{x} + \lambda \overrightarrow{y}) - \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{x} + \lambda \overrightarrow{y} \rangle \overrightarrow{u} \\ &= \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{x} + \lambda \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{y} - \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{x} \rangle \overrightarrow{u} - \lambda \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{y} \rangle \overrightarrow{u} \\ &= \phi(\overrightarrow{x}) + \lambda\, \phi(\overrightarrow{y}) \end{aligned}$$

Il suffit donc de comparer les deux endomorphismes sur une base, et nous choisissons la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{u})$:

$$f(\overrightarrow{e}_1) = -g\big(g(e_1)\big) = -g(\nu e_2) = -\nu g(e_2) = -\nu(-\nu e_1) = \nu^2 e_1$$
$$f(\overrightarrow{e}_2) = -g\big(g(e_2)\big) = -g(-\nu e_1) = \nu g(e_1) = \nu(\nu e_2) = \nu^2 e_2 \quad \text{et} \quad f(\overrightarrow{u}) = -g\big(g(\overrightarrow{u})\big) = -g\big(\overrightarrow{0}\big) = \overrightarrow{0}$$

Par ailleurs :

$$\phi(\overrightarrow{e}_1) = \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{e}_1 - \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{e}_1 \rangle \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{e}_1 = \nu^2 \overrightarrow{e}_1$$
$$\phi(\overrightarrow{e}_2) = \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{e}_2 - \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{e}_2 \rangle \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{e}_2 = \nu^2 \overrightarrow{e}_2 \quad \text{et} \quad \phi(\overrightarrow{u}) = \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{u} - \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u} \rangle \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

Les deux endomorphismes coïncident sur une base, donc on a :

$$\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3, \quad f(\overrightarrow{x}) = \phi(\overrightarrow{x}), \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(\overrightarrow{x}) = \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{x} - \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{x} \rangle \overrightarrow{u}$$

Q11. En notant toujours $\overrightarrow{u}' = \frac{1}{\nu}\overrightarrow{u}$ (vecteur unitaire) le projeté orthogonal d'un vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$ sur Δ_0 est $\overrightarrow{x}' = \langle \overrightarrow{u}' \mid \overrightarrow{x} \rangle \overrightarrow{u}'$, et on en déduit son projeté orthogonal sur P_0 :

$$\overrightarrow{x}'' = \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}' = \overrightarrow{x} - \langle \overrightarrow{u}' \mid \overrightarrow{x} \rangle \overrightarrow{u}' = \overrightarrow{x} - \frac{\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{x} \rangle}{\nu^2} \overrightarrow{u}.$$

En reprenant les notations de l'énoncé, on a : $\mathrm{P}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - \frac{\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{x} \rangle}{\nu^2} \overrightarrow{u} = \frac{1}{\nu^2} f(\overrightarrow{x})$, c.q.f.d.

Q12. On en déduit les sous-espaces propres de P : P_0 (pour la valeur propre 1) et Δ_0 (pour la valeur propre 0).
Ainsi $\mathrm{P}(\overrightarrow{e}_1) = \overrightarrow{e}_1$, $\mathrm{P}(\overrightarrow{e}_2) = \overrightarrow{e}_2$, $\mathrm{P}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ d'où $f(\overrightarrow{e}_1) = \nu^2 \overrightarrow{e}_1$, $f(\overrightarrow{e}_2) = \nu^2 \overrightarrow{e}_2$, $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$. Alors les sous-espaces propres de f sont : P_0 (pour la valeur propre ν^2) et Δ_0 (pour la valeur propre 0).

I-C Distance d'un point à un axe

Dans cette question on prend $\nu = 1$, le vecteur $\overrightarrow{u}$ est unitaire.

Q13. Soit un vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$: il se décompose (avec unicité) en $\overrightarrow{x}' + \overrightarrow{x}''$ où $\overrightarrow{x}' \in \Delta_0$, $\overrightarrow{x}'' \in \mathrm{P}_0$. Alors :

$$\begin{aligned} q(\overrightarrow{x}) &= \langle f(\overrightarrow{x}' + \overrightarrow{x}'') \mid \overrightarrow{x}' + \overrightarrow{x}'' \rangle = \langle f(\overrightarrow{x}') + f(\overrightarrow{x}'') \mid \overrightarrow{x}' + \overrightarrow{x}'' \rangle = \langle f(\overrightarrow{x}') \mid \overrightarrow{x}' + \overrightarrow{x}'' \rangle + \langle f(\overrightarrow{x}'') \mid \overrightarrow{x}' + \overrightarrow{x}'' \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{0} \mid \overrightarrow{x}' + \overrightarrow{x}'' \rangle + \nu^2 \langle \overrightarrow{x}'' \mid \overrightarrow{x}' + \overrightarrow{x}'' \rangle = 0 + \nu^2 \langle \overrightarrow{x}'' \mid \overrightarrow{x}' \rangle + \nu^2 \langle \overrightarrow{x}'' \mid \overrightarrow{x}'' \rangle = \nu^2 \|\overrightarrow{x}''\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Cette quantité est bien positive, et de façon évidente : $q(\overrightarrow{x}) = 0$ ssi $\overrightarrow{x}'' = \overrightarrow{0}$ ssi $\overrightarrow{x} \in \Delta_0$

Q14. Soit un point $M \in \mathbb{R}^3$. Soit M' le projeté orthogonal du point M sur la droite (affine) Δ_0, on a :

$$\mathrm{d}\big(M, \Delta_0\big) = \|\overrightarrow{MM'}\|.$$

Par ailleurs, en décomposant avec Chasles il vient $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$ et donc la décomposition du vecteur $\vec{x} = \overrightarrow{OM}$ sur nos deux supplémentaires est donc :

$$\vec{x} = \vec{x}' + \vec{x}'' \quad \text{où} \quad \vec{x}' = \overrightarrow{OM'} \in \Delta_0 \quad \text{et} \quad \vec{x}'' = \overrightarrow{M'M} \in \mathrm{P}_0$$

On a donc : $$q(\overrightarrow{OM}) = q(\vec{x}) = \|\vec{x}''\|^2 = \|\overrightarrow{M'M}\|^2 = \mathrm{d}\big(M, \Delta_0\big)^2.$$

I-D Distance d'une surface à une droite

Q15. Soit $(x, \theta) \in \mathbb{R}^2$, montrons que le triplet $(x, y, z) = (x, 2+\cos\theta, 2\sin\theta)$ vérifie l'équation cartésienne de $\mathscr{S}$.
Pour ces valeurs on a $4(y-2)^2 + z^2 = 4(2+\cos\theta-2)^2 + (2\sin\theta)^2 = 4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta = 4.$

Réciproquement, divisons dans l'équation par 4, il vient : $(y-2)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = 1.$ Posons $Y = y-2$ et $Z = \frac{z}{2}$, on a $Y^2 + Z^2 = 1$ et donc il existe un réel θ vérifiant : $\begin{cases} Y = \cos\theta \\ Z = \sin\theta \end{cases}$. Il vient : $\begin{cases} y = 2+\cos\theta \\ z = 2\sin\theta \end{cases}$.

Q16. Comme on l'a établi la question Q13, la fonction q est toujours positive. Alors pour tout couple $(x, \theta) \in \mathbb{R}^2$ on a $h(x, \theta) \geq 0$: la fonction h admet 0 pour minorant (sur $\mathbb{R}^2$ tout entier).

Q17. Soient deux points M_0, M. On a :

$$q(\overrightarrow{OM}) \geq q(\overrightarrow{OM_0}) \quad \text{ssi} \quad \mathrm{d}\big(M, \Delta_0\big)^2 \geq \mathrm{d}\big(M_0, \Delta_0\big)^2 \quad \text{ssi} \quad \mathrm{d}\big(M, \Delta_0\big) \geq \mathrm{d}\big(M_0, \Delta_0\big)$$

On a vu que $q(\vec{x}) = 0$ ssi $\vec{x}'' = \vec{0}$ ssi $\vec{x} \in \Delta_0$ (question Q13). En un point $M_0 = M(x_0, \theta_0)$ vérifiant $\overrightarrow{OM_0} \in \Delta_0$, la fonction h atteindra un minimum (global, sur $\mathbb{R}^2$ tout entier).
Puisque $\overrightarrow{OM_0}\big(x, 2+\cos\theta, 2\sin\theta\big)$, utilisons la formule de géométrie dans l'espace (la norme de $\vec{u}$ vaut 1) :

$$q(\overrightarrow{OM}) = \mathrm{d}\big(M, \Delta_0\big)^2 = \left(\frac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}\|}{\|\vec{u}\|}\right)^2 = \|\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}\|^2$$

Il vient : $\vec{u}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \wedge \overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x \\ 2+\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\cos\theta \\ x \\ 0 \end{vmatrix}$ et donc : $h(x, \theta) = q(\overrightarrow{OM}) = (2+\cos\theta)^2 + x^2.$

On a clairement ici : $\forall (x, \theta) \in \mathbb{R}^2, \quad 1 \leq 1+x^2 \leq h(x, \theta)$ et la valeur minimale 1 est atteinte pour $\cos\theta = -1$: il s'agit du point $M_0(0,1,0)$, seul de sa catégorie.

On peut aussi chercher les points critiques de h : $\frac{\partial h}{\partial x}(x, \theta) = 2x$, $\frac{\partial h}{\partial \theta}(x, \theta) = -2(2+\cos\theta)\sin\theta$ d'où les points critiques (vérifiant $x = 0$ et $\sin\theta = 0$) : $X_k = (0, k\pi)$ où $k \in \mathbb{Z}$. Alors $h(X_k) = \big(2+(-1)^k\big)^2$. Les points critiques de h correspondent aux points $M_1(0,3,0)$ et $M_0(0,1,0)$ de $\mathscr{S}$. On constate que h atteint un minimum en M_0.

Q18. On pose $\varphi(x, y, z) = 4(y-2)^2 + z^2 - 4$ et on calcule :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, z) = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y, z) = 8(y-2), \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z) = 2z.$$

Au point M_0 on a $\vec{\nabla}\varphi\big(M_0\big) = (0, -8, 0) \neq \vec{0}$ i.e. le point M_0 est un point régulier de $\mathscr{S}$. L'équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ en M_0 s'obtient ainsi : $M(x, y, z) \in \mathscr{P}_0$ ssi $\big\langle \overrightarrow{M_0M} \,|\, \vec{\nabla}\varphi(M_0) \big\rangle = 0$ et il vient : $y = 1$.

Enfin, pour satisfaire à toutes les questions posées :
Si $M(x, y, z) \in \mathscr{S}$ alors $4(y-2)^2 \leq 4$ (et $z^2 \leq 4$) d'où $(y-2)^2 \leq 1$ qui donne $-1 \leq y-2 \leq 1$ puis $1 \leq y \leq 3$.

II — Droites et plans stables par un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

II-A Une remarque sur le polynôme caractéristique

Q19. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ un polynôme de degré 3. On peut écrire $P = aP_1$ puisque $a \neq 0$. La fonction polynôme associée à P_1 est bien sûr continue sur $\mathbb{R}$, et elle vérifie $\lim\limits_{x \to -\infty} P_1(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P_1(x) = +\infty$. Alors on peut trouver deux réels $\alpha < 0 < \beta$ vérifiant $P_1(\alpha) < 0$ et $P_1(\beta) > 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\gamma \in \,]\alpha, \beta[$ tel que $P_1(\gamma) = 0$. Ce réel γ est, bien entendu, une racine de P.

II-B Cas d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

Q20. Le polynôme caractéristique de f est un polynôme réel de degré 3 : par la question précédente, ce polynôme admet au moins une racine réelle. Pour f on obtient l'existence d'au moins une valeur propre réelle (et au moins un vecteur propre).

Q21. (Suite des questions de cours !) Soit $\Delta = \text{vect}(\overrightarrow{u})$ une droite vectorielle stable par f. En particulier $f(\overrightarrow{u})$ appartient à Δ : c'est un vecteur de la forme $\lambda\overrightarrow{u}$. Si $\overrightarrow{x} = k\overrightarrow{u}$ appartient à Δ, alors $f(\overrightarrow{x}) = kf(\overrightarrow{u}) = k\lambda\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{x}$. Ainsi si une droite vectorielle est stable par f, c'est une droite propre.

Réciproquement, si $\Delta = \text{vect}(\overrightarrow{u})$ est une droite vectorielle formée de vecteurs propres de f, alors pour tout $\overrightarrow{x} \in \Delta$ il existe $k_{\overrightarrow{x}} \in \mathbb{R}$ tel que $f(\overrightarrow{x}) = k_{\overrightarrow{x}}\overrightarrow{x}$, et donc : $f(\overrightarrow{x}) \in \Delta$.

Bien entendu, en rassemblant les résultats, on obtient : une droite « formée de vecteurs propres » est incluse dans un s.e.v. propre

Conséquence : on sait que f admet au moins un vecteur propre (question 20), on en déduit que la droite vectorielle qu'il engendre est une droite stable.

Q22. Soit P_1, P_2 deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$, distincts. On en déduit que $P_1 \cap P_2$ est un sous-espace vectoriel strictement inclus dans P_1 (par exemple) : sa dimension est < 2, et donc $P_1 \cap P_2$ est soit une droite, soit le s.e.v. nul. Or, on a $\dim(P_1 + P_2) - \dim(P_1 \cap P_2) = \dim P_1 + \dim P_2 = 4$ d'une part, et puisque P_1+P_2 est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ on a $\dim(P_1+P_2) \leq 3$. On en déduit : $\dim(P_1 \cap P_2) \geq 1$. Finalement, $P_1 \cap P_2$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$.

Soit enfin $\overrightarrow{x} \in P_1 \cap P_2$, on a $\overrightarrow{x} \in P_1$ et donc $f(\overrightarrow{x}) \in P_1$. De même on a $\overrightarrow{x} \in P_2$ et donc $f(\overrightarrow{x}) \in P_2$. Alors $f(\overrightarrow{x}) \in P_1 \cap P_2$: la droite vectorielle $P_1 \cap P_2$ est stable par f. C'est donc une droite propre, d'après Q21.

II-C Cas d'une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$

Soit f une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$.

Q23. Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ stable par f : $\forall \overrightarrow{x} \in F,\ f(\overrightarrow{x}) \in F$. Montrons que $F^\perp$ est stable par f. Remarquons d'abord que $f(F)$ est un s.e.v. de même dimension que F, et il est inclus dans F, on a donc $f(F) = F$. Soit alors $y \in F^\perp$, pour tout $x \in F$ il existe $z \in F$ tel que $x = f(z)$, et donc on a :

$$\langle f(y) \,|\, x \rangle = \langle f(y) \,|\, f(z) \rangle = \langle y \,|\, z \rangle = 0 \quad : \quad \text{on a bien } f(y) \in F^\perp.$$

Q24. Soit maintenant un plan $\mathscr{P}$ stable par f. Par la question $Q23$ le s.e.v. $\mathscr{P}^\perp$ est stable par f. C'est donc une droite stable. D'après la question Q21, c'est nécessairement une droite propre (engendrée par un vecteur propre).

Q25. -i- Si f est la réflexion par rapport à un plan $\mathscr{P}$, on sait que f est diagonalisable, et que ses sous-espaces propres sont $\mathscr{P}$ pour la valeur propre 1, et $\mathscr{P}^\perp$ (droite vectorielle) pour la valeur propre -1.

-ii- Si f est la rotation axe $\Delta_0 = \text{vect}(\overrightarrow{n})$ et d'angle θ (orienté par $\overrightarrow{n}$) : on sait que l'axe est un sous-espace propre pour la valeur propre 1. Son orthogonal, le « plan de rotation » $\mathscr{P}$ est donc un plan stable. Si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, aucun vecteur de $\mathscr{P}$ n'est propre (le vecteur image d'un vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathscr{P}$ est « déphasé » d'un angle θ qui le rend non colinéaire à $\overrightarrow{x}$).

Voyons maintenant le cas où $\theta \in \pi\mathbb{Z}$. Si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, alors $f = \text{Id}$ (admet une seule valeur propre 1, le sous-espace propre est $\mathbb{R}^3$ entier). Enfin si $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$, l'endomorphisme induit par f sur le plan de rotation est $-\text{Id}_{\mathscr{P}}$: le plan de rotation est un sous-espace propre pour f (et la valeur propre -1).

II-D Endomorphismes qui commutent et stabilisation de sous-espaces

Q26. Soit f_1, f_2 deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui commutent. Soit E_λ un sous-espace propre de f_1. Montrons que E_λ est stable par f_2 : soit $\overrightarrow{x} \in E_\lambda$, il faut démontrer que $f_2(\overrightarrow{x}) \in E_\lambda$ i.e. $f_1\big(f_2(\overrightarrow{x})\big) = \lambda f_2(\overrightarrow{x})$. Calculons donc :

$$f_1\big(f_2(\overrightarrow{x})\big) = f_2\big(f_1(\overrightarrow{x})\big) = f_2\big(\lambda\overrightarrow{x}\big) = \lambda f_2(\overrightarrow{x}).$$

Q27. Soit f_1, f_2 deux rotations, d'axes respectifs Δ_1, Δ_2. L'axe Δ_1 est un sous-espace propre de f_1 donc il est stable par f_2. Ainsi Δ_1 est une droite propre pour f_2. Une première possibilité est que l'axe Δ_1 soit confondu avec Δ_2. Ainsi, ***une première situation où deux rotations commutent est le cas de deux rotations de même axe.***

Supposons maintenant que Δ_1 ne soit pas confondu avec Δ_2. Δ_1 est donc une droite propre pour f_2 qui n'est pas l'axe de f_2 : d'après les rappels de la question Q26-ii-, Δ_1 est inclus dans le plan de rotation $\text{P}_2 = \left(\Delta_2\right)^\perp$ de f_2 et l'angle de la rotation appartient à $\pi\mathbb{Z}$. On peut tenir le même raisonnement en échangeant les indices 1 et 2 : ***deux rotations qui commutent et qui sont d'axes distincts sont, si aucune n'est l'identité, des demi-tours d'axes perpendiculaires.***

III — Matrice inertie d'un solide indéformable

III-B Un exemple de système mécanique

Q29. La somme des masses est $\sigma = 5$, le centre d'inertie est donc l'unique point G vérifiant :

$$\overrightarrow{OG} = \tfrac{1}{5}\big(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} + 2\overrightarrow{OM_4}\big) \quad \text{et il vient} \quad G\big(\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}\big).$$

Le moment d'inertie est $I_\Delta(\mathscr{S}) = \mathrm{d}(M_1,\Delta)^2 + \mathrm{d}(M_2,\Delta)^2 + \mathrm{d}(M_3,\Delta)^2 + 2\mathrm{d}(M_4,\Delta)^2$

$$= \|\vec{v} \wedge \overrightarrow{OM_1}\|^2 + \|\vec{v} \wedge \overrightarrow{OM_2}\|^2 + \|\vec{v} \wedge \overrightarrow{OM_3}\|^2 + 2\|\vec{v} \wedge \overrightarrow{OM_4}\|^2$$

Il faut calculer : $\vec{v} \wedge \overrightarrow{OM_1} = \vec{0}$, $\vec{v} \wedge \overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}$, $\vec{v} \wedge \overrightarrow{OM_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$, $\vec{v} \wedge \overrightarrow{OM_4} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$

et donc : $\|\vec{v} \wedge \overrightarrow{OM_1}\| = 0$, $\|\vec{v} \wedge \overrightarrow{OM_2}\| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\|\vec{v} \wedge \overrightarrow{OM_3}\| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\|\vec{v} \wedge \overrightarrow{OM_4}\| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Alors :

$$I_\Delta(\mathscr{S}) = 0 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 2\,\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

III-C Cas général : matrice d'inertie d'un système mécanique

Q30. Si $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, en écrivant autrement le double produit vectoriel :

$$\overline{\overline{J_{\mathscr{S},Q}}}(\vec{x}) = -\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{QM_i} \wedge \left(\overrightarrow{QM_i} \wedge \vec{x}\right) = -\sum_{i=1}^{n} m_i \left(g_{\overrightarrow{QM_i}}\right)^2(\vec{x}) = +\sum_{i=1}^{n} m_i\, f_{\overrightarrow{QM_i}}(\vec{x}) \text{ puisque } f_{\vec{u}} = -\left(g_{\vec{u}}\right)^2.$$

Q31. Posons $\vec{v}\,' = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$, en utilisant la linéarité à gauche, et ensuite le résultat de la question Q14 :

$$\left\langle \overline{\overline{J_{\mathscr{S},Q}}}(\vec{v}) \,\middle|\, \vec{v} \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} m_i\, f_{\overrightarrow{QM_i}}(\vec{v}) \,\middle|\, \vec{v} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} m_i \left\langle f_{\overrightarrow{QM_i}}(\vec{v}) \,\middle|\, \vec{v} \right\rangle = \|\vec{v}\|^2 \sum_{i=1}^{n} m_i \left\langle f_{\overrightarrow{QM_i}}(\vec{v}\,') \,\middle|\, \vec{v}\,' \right\rangle = \|\vec{v}\|^2 \sum_{i=1}^{n} m_i\, \mathrm{d}\left(M_i,\Delta\right)^2$$

Q32. Reprenons le résultat de la question Q30 ci-dessus, et les notations de la partie I-B : la matrice $\mathrm{M}_{\mathscr{S},Q}$ de l'endomorphisme $\overline{\overline{J_{\mathscr{S},Q}}}(\vec{x})$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, s'exprime en fonction des matrices $F_{\overrightarrow{QM_i}}$ des endomorphismes $f_{\overrightarrow{QM_i}}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$\overline{\overline{J_{\mathscr{S},Q}}} = \sum_{i=1}^{n} m_i\, f_{\overrightarrow{QM_i}} \quad \text{entraîne} \quad \mathrm{M}_{\mathscr{S},Q} = \sum_{i=1}^{n} m_i\, F_{\overrightarrow{QM_i}}.$$

À la question Q9, il a été établi que les matrices $F_{\overrightarrow{QM_i}}$ sont symétriques réelles. Alors leur combinaison linéaire $\mathrm{M}_{\mathscr{S},Q}$ est une matrice symétrique réelle.

Par ailleurs, ses coefficients diagonaux sont :

—> $m_{1,1} = \left\langle \overline{\overline{J_{\mathscr{S},Q}}}(\vec{i}) \,\middle|\, \vec{i} \right\rangle$ puisque la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormée, d'où $m_{1,1} = \|\vec{i}\|^2\, \mathrm{I}_{\Delta_1}(\mathscr{S}) = \mathrm{I}_{\Delta_1}(\mathscr{S})$ (question Q31). Dans cette formule l'axe que l'on a noté Δ_1 est l'axe passant par Q dirigé par $\vec{i}$.

—> Et de même : $m_{2,2} = \mathrm{I}_{\Delta_2}(\mathscr{S})$ et $m_{3,3} = \mathrm{I}_{\Delta_3}(\mathscr{S})$, moments d'axes respectifs $\Delta_2 = (Q,\vec{j})$ et $\Delta_3 = (Q,\vec{k})$.

Q33. L'endomorphisme $\overline{\overline{J_{\mathscr{S},Q}}}$ est diagonalisable. S'il admet une valeur propre multiple λ, alors $\overline{\overline{J_{\mathscr{S},Q}}}$ admet (au moins) un sous-espace propre E_λ de dimension ≥ 2 (mis à part le cas exceptionnel où $\overline{\overline{J_{\mathscr{S},Q}}} = \lambda\,\mathrm{Id}$, le s.e.v. propre E_λ est de dimension 2). Toute droite vectorielle incluse dans E_λ est une droite propre, alors comme on l'a vu, c'est une droite stable (question Q21). En ce cas, l'endomorphisme $\overline{\overline{J_{\mathscr{S},Q}}}$ admet donc une infinité de droites stables. Nous venons de démontrer, en utilisant la contraposée :

si $\overline{\overline{J_{\mathscr{S},Q}}}$ admet un nombre fini de droites stables, alors ses valeurs propres sont simples, deux à deux distinctes.

Réciproquement, si $\overline{\overline{J_{\mathscr{S},Q}}}$ admet trois valeurs propres distinctes, alors les sous-espaces propres forment trois droites stables, et ce sont les seules droites stables (puisqu'il n'y a pas d'autres vecteur propre).

IV — Symétries mécaniques et directions principales d'inertie

IV-B Mise en évidence d'une symétrie mécanique sur le système du III-B

Q34. Nous avions trouvé $G\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$ et donc $\overrightarrow{OG}\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$ dans le repère initial $\mathscr{R}_0$. Dans le repère $\mathscr{R} = \mathscr{R}_{G_\mathscr{S}}$ la relation $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{5}\vec{i} + \frac{1}{5}\vec{j} + \frac{2}{5}\vec{k}$ donne $\overrightarrow{GO} = \frac{-1}{5}\vec{i} + \frac{-1}{5}\vec{j} + \frac{-2}{5}\vec{k}$ d'où $M_1 = O\left(\frac{-1}{5},\frac{-1}{5},\frac{-2}{5}\right)_\mathscr{R}$ et $G\left(0,0,0\right)_\mathscr{R}$.

À l'aide de $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM}$:

$$M_1 = O\left(\tfrac{-1}{5},\tfrac{-1}{5},\tfrac{-2}{5}\right)_\mathscr{R},\quad M_2\left(\tfrac{4}{5},\tfrac{-1}{5},\tfrac{-2}{5}\right)_\mathscr{R},\quad M_3\left(\tfrac{-1}{5},\tfrac{4}{5},\tfrac{-2}{5}\right)_\mathscr{R},\quad M_4\left(\tfrac{-1}{5},\tfrac{-1}{5},\tfrac{3}{5}\right)_\mathscr{R}.$$

On en déduit les coordonnées dans la base $\mathscr{E} = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de $\overrightarrow{GM_1}$, $\overrightarrow{GM_2}$, $\overrightarrow{GM_3}$, $\overrightarrow{GM_4}$:

$$X_1 = \begin{vmatrix} -1/5 \\ -1/5 \\ -2/5 \end{vmatrix},\quad X_2 = \begin{vmatrix} 4/5 \\ -1/5 \\ -2/5 \end{vmatrix},\quad X_3 = \begin{vmatrix} -1/5 \\ 4/5 \\ -2/5 \end{vmatrix},\quad X_4 = \begin{vmatrix} -1/5 \\ -1/5 \\ 3/5 \end{vmatrix}.$$

Notons P la matrice de Ψ, on trouve les coordonnées dans $\mathscr{E}$ des vecteurs $\Psi(\overrightarrow{GM_1})$, $\Psi(\overrightarrow{GM_2})$, $\Psi(\overrightarrow{GM_3})$, $\Psi(\overrightarrow{GM_4})$:

$$PX_1=\begin{vmatrix}-1/5\\-1/5\\-2/5\end{vmatrix}=X_1\,,\quad PX_2=\begin{vmatrix}-1/5\\4/5\\-2/5\end{vmatrix}=X_3\,,\quad PX_3=\begin{vmatrix}4/5\\-1/5\\-2/5\end{vmatrix}=X_2\,,\quad PX_4=\begin{vmatrix}-1/5\\-1/5\\3/5\end{vmatrix}=X_4$$

On obtient : l'application Ψ induit une permutation des points M_i que l'on peut écrire $\Psi(\overrightarrow{GM_i}) = \overrightarrow{GM_{\sigma(i)}}$ pour $\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}$. On a de plus $m_i = m_{\sigma(i)}$ (puisque $m_2 = m_3$). On a montré que Ψ est une symétrie mécanique de $\mathcal{S}$.

IV-C Cas général : recherche des moments principaux et des directions principales en utilisant les symétries mécaniques du système

Q35. Soit ϕ une symétrie mécanique de $\mathcal{S}$, on peut montrer que $\phi \circ \overline{\overline{J_{\mathcal{S},G}}} = \overline{\overline{J_{\mathcal{S},G}}} \circ \phi$ soit à l'aide de la définition de $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},Q}}}$, soit à l'aide de l'expression $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G}}} = \sum_{i=1}^{n} m_i\, f_{\overrightarrow{GM_i}}$ (Q30). Par exemple, avec celle-ci :

$$\phi \circ \overline{\overline{J_{\mathcal{S},G}}}(\overrightarrow{x}) = \phi\Big(\sum_{i=1}^{n} m_i\, f_{\overrightarrow{GM_i}}(\overrightarrow{x})\Big) = \sum_{i=1}^{n} m_i\, \phi\big(f_{\overrightarrow{GM_i}}(\overrightarrow{x})\big) \quad \text{(linéarité de } \phi)$$

Rappelons que $f_{\overrightarrow{GM_i}}(\overrightarrow{x}) = \|\overrightarrow{GM_i}\|^2\, \overrightarrow{x} - \langle \overrightarrow{GM_i} \mid \overrightarrow{x} \rangle\, \overrightarrow{GM_i}$ (question Q10). On peut écrire, par isométrie de ϕ :

$$f_{\overrightarrow{GM_i}}(\overrightarrow{x}) = \|\phi(\overrightarrow{GM_i})\|^2\, \overrightarrow{x} - \langle \phi(\overrightarrow{GM_i}) \mid \phi(\overrightarrow{x}) \rangle\, \overrightarrow{GM_i}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\phi\big(f_{\overrightarrow{GM_i}}(\overrightarrow{x})\big) &= \|\phi(\overrightarrow{GM_i})\|^2\, \phi(\overrightarrow{x}) - \langle \phi(\overrightarrow{GM_i}) \mid \phi(\overrightarrow{x}) \rangle\, \phi(\overrightarrow{GM_i})\\ &= \|\overrightarrow{GM_{\sigma(i)}}\|^2\, \phi(\overrightarrow{x}) - \langle \overrightarrow{GM_{\sigma(i)}} \mid \phi(\overrightarrow{x}) \rangle\, \overrightarrow{GM_{\sigma(i)}}\end{aligned}$$

En utilisant ce qui précède, et aussi $m_i = m_{\sigma(i)}$, on conclut :

$$\begin{aligned}\phi \circ \overline{\overline{J_{\mathcal{S},G}}}(\overrightarrow{x}) &= \sum_{i=1}^{n} m_{\sigma(i)} \left[\|\overrightarrow{GM_{\sigma(i)}}\|^2\, \phi(\overrightarrow{x}) - \langle \overrightarrow{GM_{\sigma(i)}} \mid \phi(\overrightarrow{x}) \rangle\, \overrightarrow{GM_{\sigma(i)}}\right]\\ &= \sum_{i'=1}^{n} m_{i'} \left[\|\overrightarrow{GM_{i'}}\|^2\, \phi(\overrightarrow{x}) - \langle \overrightarrow{GM_{i'}} \mid \phi(\overrightarrow{x}) \rangle\, \overrightarrow{GM_{i'}}\right] \;=\; \overline{\overline{J_{\mathcal{S},G}}}(\phi(\overrightarrow{x}))\end{aligned}$$

Q36. Soit ϕ une symétrie mécanique de $\mathcal{S}$, puisque les endomorphismes ϕ et $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G}}}$ commutent, tout sous-espace propre de ϕ est stable par $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G}}}$ (question Q26).

Q37. Soit ϕ une réflexion par rapport à un plan P, et soit la droite $\Delta = \mathrm{P}^{\perp}$. Si ϕ est symétrie mécanique de $\mathcal{S}$, alors Δ est un s.e.v. propre de ϕ, et puisque ϕ et $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G}}}$ commutent, on en déduit que Δ est stable par $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G}}}$ (Q36).

La matrice $\mathrm{M}_{\mathcal{S},G}$ de $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G}}}$ dans la B.O.N. $\mathscr{E}$ est symétrique réelle. Alors d'après le cours, on sait que si un s.e.v. F est stable par $\mathrm{M}_{\mathcal{S},G}$ son orthogonal $F^{\perp}$ est stable par $\mathrm{M}_{\mathcal{S},G}$. Ce résultat entraîne un résultat identique pour l'endomorphisme $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G}}}$, et il vient : $\mathrm{P} = \Delta^{\perp}$ est stable par $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G}}}$.

Enfin, on vient de voir que tout plan de symétrie P de $\mathcal{S}$ est stable par $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G}}}$, son orthogonal Δ est donc une droite stable par $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G}}}$: c'est une droite vectorielle propre pour $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G}}}$ appelée aussi « droite principale d'inertie de $\mathcal{S}$ » (voir les définitions III-A).

Q38. Soit $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ deux plans de symétrie de $\mathcal{S}$. Leurs orthogonaux respectifs sont des droites Δ_1, Δ_2 : on a $\Delta_1 \perp \Delta_2$ puisque les plans sont perpendiculaires, et Δ_1, Δ_2 sont stables par $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G}}}$ d'après la question Q37 : ce sont des droites principales d'inertie de $\mathcal{S}$.

Enfin, considérons la droite $\Delta = \mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2$. Elle est engendré par un vecteur propre de $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G}}}$ c'est donc également une droite principale d'inertie de $\mathcal{S}$, et puisque $\Delta \subset \mathrm{P}_1$ et $\Delta \subset \mathrm{P}_2$, on a $\Delta \perp \Delta_1$ et $\Delta \perp \Delta_2$.

Au bilan, $\Delta_1, \Delta_2, \Delta$ sont trois droites principales d'inertie de $\mathcal{S}$, et elle sont deux à deux orthogonales. Si $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3$ sont des vecteurs unitaires de $\Delta_1, \Delta_2, \Delta$, ils sont en particuliers propres pour $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G}}}$.

Le repère $\big(G_{\mathcal{S}}\,; \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3\big)$ est orthonormé et ses axes sont des droites principales d'inertie de $\mathcal{S}$.

Q39. Soit $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ deux plans de symétrie de $\mathcal{S}$ non perpendiculaires. Les droites orthogonales Δ_1, Δ_2 à ces plans sont deux droites vectorielles propres pour $\overline{\overline{J_{\mathcal{S},G}}}$, c'est-à-dire deux droites principales d'inertie de $\mathcal{S}$.

Les droites propres Δ_1, Δ_2 ne sont pas orthogonales, sinon les plans $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ seraient perpendiculaires. On en déduit que les valeurs propres associées à Δ_1, Δ_2 sont égales.

Les moments principaux d'inertie sont les valeurs propres comptées avec leur multiplicité. On peut donc reformuler le résultat obtenu : deux moments principaux d'inertie de $\mathcal{S}$ sont égaux.

V — Recherche du maximum d'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Q40. En notant simplement E l'énergie cinétique définie dans l'énoncé, il vient :

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n} m_i \Big\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{GM_i}(t)\Big\|^2\Big) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n} m_i \Big\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{R}_{\omega t}\big(\overrightarrow{GM_i}\big)\Big\|^2\Big)$$

Le vecteur $\mathrm{R}_{\omega t}\big(\overrightarrow{GM_i}\big)$ est le produit matriciel de la matrice $\mathrm{R}_{\omega t}\big(\overrightarrow{GM_i}\big)$ par le vecteur colonne X_i (constant) des coordonnées de $\overrightarrow{GM_i}$, donc on a : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{R}_{\omega t}\big(\overrightarrow{GM_i}\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathrm{R}_{\omega t}X_i\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathrm{R}_{\omega t}\big)X_i + \mathrm{R}_{\omega t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(X_i\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathrm{R}_{\omega t}\big)X_i$.

Notons $X_i = (x_i, y_i, z_i)^{\mathrm{T}}$, on a $\mathrm{R}_{\omega t}\big(\overrightarrow{GM_i}\big) = \mathrm{R}_{\omega t}X_i = x_i U(t) + y_i V(t) + z_i W(t)$.

De même : $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathrm{R}_{\omega t}\big)X_i = x_i\big(\omega\vec{n}\wedge U(t)\big) + y_i\big(\omega\vec{n}\wedge V(t)\big) + z_i\big(\omega\vec{n}\wedge W(t)\big)$$

Par linéaire à droite du produit vectoriel, il vient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathrm{R}_{\omega t}\big)X_i = \omega\vec{n}\wedge\big(x_i U(t) + y_i V(t) + z_i W(t)\big) = \omega\vec{n}\wedge\mathrm{R}_{\omega t}\big(\overrightarrow{GM_i}\big)$$

Il n'y a plus qu'à reporter dans l'expression de E, et l'on obtient la première expression attendue :

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \|\omega\vec{n}\wedge\mathrm{R}_{\omega t}\big(\overrightarrow{GM_i}\big)\|^2 = \frac{1}{2}\omega^2\sum_{i=1}^{n} m_i \|\vec{n}\wedge\overrightarrow{GM_i}(t)\|^2$$

Poursuivons ce calcul, afin d'obtenir la seconde expression :

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\omega^2\sum_{i=1}^{n} m_i \|\vec{n}\wedge\overrightarrow{GM_i}(t)\|^2 = \frac{1}{2}\omega^2\sum_{i=1}^{n} m_i\, \mathrm{d}\big(M_i(t), \mathscr{D}\big)^2 = \frac{1}{2}\,\omega^2\, I_{\mathscr{D}}\big(\mathscr{S}\big)$$

Utilisons l'expression de la question 31 : $I_{\mathscr{D}}\big(\mathscr{S}\big) = \langle \overline{\overline{J_{\mathscr{S},G}}}\big(\vec{n}\big) \mid \vec{n}\rangle$, puisque le vecteur $\vec{n}$ est unitaire.

Reportons : $$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\,\omega^2\, I_{\mathscr{D}}\big(\mathscr{S}\big) = \frac{1}{2}\,\omega^2\,\langle \overline{\overline{J_{\mathscr{S},G}}}\big(\vec{n}\big) \mid \vec{n}\rangle.$$

Q41. Notons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres correspondant aux vecteurs $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, pour tout $\vec{x}(a, b, c)$ il vient :

$$\begin{aligned}
\big\langle \overline{\overline{J_{\mathscr{S},G}}}\big(\vec{x}\big) \big| \vec{x}\big\rangle &= \big\langle \alpha f\big(\vec{e_1}\big) + \beta f\big(\vec{e_2}\big) + \gamma f\big(\vec{e_3}\big) \big| \vec{x}\big\rangle \\
&= \big\langle \alpha\lambda_1\vec{e_1} + \beta\lambda_2\vec{e_2} + \gamma\lambda_3\vec{e_3} \big| \vec{x}\big\rangle \\
&= \alpha\lambda_1\big\langle \vec{e_1}\big|\vec{x}\big\rangle + \beta\lambda_2\big\langle \vec{e_2}\big|\vec{x}\big\rangle + \gamma\lambda_3\big\langle \vec{e_3}\big|\vec{x}\big\rangle \\
&= a^2\lambda_1 + b^2\lambda_2 + c^2\lambda_3
\end{aligned}$$

Alors pour $\vec{x} = \vec{n}(\alpha\beta, \gamma)$ il vient $I_{\mathscr{D}}\big(\mathscr{S}\big) = \big\langle \overline{\overline{J_{\mathscr{S},G}}}\big(\vec{n}\big) \big| \vec{n}\big\rangle = \alpha^2\lambda_1 + \beta^2\lambda_2 + \gamma^2\lambda_3$

et en prenant $\vec{x} = \vec{e_1}(1, 0, 0)$ on trouve $I_{\Delta_1}\big(\mathscr{S}\big) = \big\langle \overline{\overline{J_{\mathscr{S},G}}}\big(\vec{e_1}\big) \big| \vec{e_1}\big\rangle = \lambda_1$. De même : $I_{\Delta_2}\big(\mathscr{S}\big) = \lambda_2$ et $I_{\Delta_3}\big(\mathscr{S}\big) = \lambda_3$.

En rassemblant ces résultats, on obtient :

$$I_{\mathscr{D}}\big(\mathscr{S}\big) = \alpha^2\lambda_1 + \beta^2\lambda_2 + \gamma^2\lambda_3 = \alpha^2 I_{\Delta_1}\big(\mathscr{S}\big) + \beta^2 I_{\Delta_2}\big(\mathscr{S}\big) + \gamma^2 I_{\Delta_3}\big(\mathscr{S}\big).$$

Et en multipliant toute la ligne par $\frac{1}{2}\,\omega^2$:

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\,\omega^2\Big(\alpha^2 I_{\Delta_1}\big(\mathscr{S}\big) + \beta^2 I_{\Delta_2}\big(\mathscr{S}\big) + \gamma^2 I_{\Delta_3}\big(\mathscr{S}\big)\Big)$$

Q42. Il s'agit de maximiser $I_{\mathscr{D}}\big(\mathscr{S}\big) = \big\langle \overline{\overline{J_{\mathscr{S},G}}}\big(\vec{n}\big) \big| \vec{n}\big\rangle = \alpha^2\lambda_1 + \beta^2\lambda_2 + \gamma^2\lambda_3$.

Si par exemple λ_1, λ_2 sont inférieurs ou égaux à λ_3 on a :

$$I_{\mathscr{D}}\big(\mathscr{S}\big) = \alpha^2\lambda_1 + \beta^2\lambda_2 + \gamma^2\lambda_3 \le \big(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\big)\,\lambda_3 = \lambda_3$$

puisque $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \|\vec{n}\|^2 = 1$, et le majorant λ_3 est un maximum atteint en $\vec{e_3}$. Dans le cas général, on obtient :

$$\mathrm{E} \le \mathrm{E}_{\max} = \frac{1}{2}\,\omega^2\lambda_{\max}$$

où $\lambda_{\max} = \max\big(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\big)$, la valeur $\mathrm{E}_{\max}$ étant atteinte si la rotation s'effectue le long de la droite principale d'inertie de plus grand moment.