Mathématiques 2

TSI **2018**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrices autorisées

Ce problème aborde l'étude de solutions exactes ou approchées d'équations et systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants ainsi que des méthodes de calcul numérique de solutions approchées de ces équations.

La première partie s'intéresse à la résolution exacte des équations différentielles qui modélisent la charge et la décharge d'un condensateur. La deuxième partie présente la méthode d'Euler pour approcher la solution d'une équation différentielle correspondant à la décharge d'un condensateur ; les notions de convergence, de consistance et de stabilité de cette méthode y sont abordées. La troisième partie aborde la résolution exacte et approchée d'un système différentiel linaire d'ordre 2 à coefficients constants. Les trois parties sont largement indépendantes les unes des autres.

On note $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des vecteurs colonnes à coefficients réels comprenant 2 lignes. On identifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$: un vecteur de $\mathbb{R}^2$ est représenté par une matrice colonne à deux lignes. $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. L'ensemble $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui sont orthogonales.

On note I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et si on note $u_{1,n}$ et $u_{2,n}$ les coordonnées du terme général U_n dans une base donnée de $\mathbb{R}^2$, on dit que la suite (U_n) est bornée dans $\mathbb{R}^2$ si les suites $(u_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $\mathbb{R}$. On admet que le caractère borné d'une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ne dépend pas du choix de la base.

Avec les mêmes notations, on dit que la suite (U_n) est convergente dans $\mathbb{R}^2$ si les suites $(u_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes dans $\mathbb{R}$. On admet que le caractère convergent d'une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ne dépend pas du choix de la base.

I Décharge et charge d'un condensateur

On considère un condensateur de capacité C, deux résistances R identiques et une force électromotrice qui délivre une tension constante U, connectés suivant le schéma de la figure 1. On suppose que le condensateur est chargé sous la différence de potentiel $u_0 > 0$ et que les deux interrupteurs K_1 et K_2 sont ouverts. À l'instant $t_0 = 0$, on ferme l'interrupteur K_2. La tension u aux bornes du condensateur au cours du processus de décharge vérifie l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad u'(t) = -\frac{1}{\tau}u(t) \tag{I.1}$$

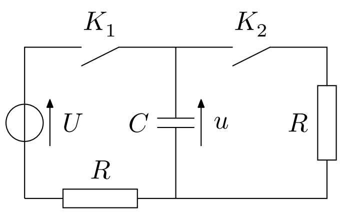

Figure 1

Le réel $\tau = RC$ est la constante de temps du circuit.

I.A –

Q 1. Rappeler la forme des solutions de l'équation (I.1).

La fonction u est désormais l'unique solution de l'équation (I.1) telle que $u(0) = u_0$.

Q 2. Exprimer en fonction de τ l'instant t_1 à partir duquel la tension $u(t)$ devient inférieure à 10% de sa valeur initiale u_0.

I.B – À l'instant t_1, on ouvre l'interrupteur K_2 et on ferme l'interrupteur K_1 simultanément. La tension u aux bornes du condensateur vérifie alors :

$$\forall t \geqslant t_1, \quad u'(t) = -\frac{1}{\tau}u(t) + \frac{U}{\tau} \tag{I.2}$$

Q 3. Exprimer la valeur de $u(t)$ pour $t \geqslant t_1$. (On rappelle que $u(t_1) = u_0/10$.)

Q 4. Étudier les variations de la fonction $t \mapsto u(t)$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. On distinguera les cas $U < u_0/10$, $U = u_0/10$ et $U > u_0/10$ et on précisera les dérivées à droite et à gauche de u en t_1, ainsi que la limite de la fonction u en $+\infty$.

Q 5. Représenter graphiquement la courbe représentative de la fonction $t \mapsto u(t)$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ dans chacun des trois cas distingués à la question précédente.

I.C – On suppose toujours qu'à l'instant t_1 on ouvre l'interrupteur K_2 et on ferme l'interrupteur K_1 simultanément. L'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur à l'instant $t_0 = 0$ vaut $E(t_0) = \frac{1}{2}Cu_0^2$.

À tout instant $t \in [0, t_1]$, l'énergie emmagasinée dans le condensateur vaut $E(t) = E(t_0) + \int_{t_0}^{t} Cu(s)u'(s)\,\mathrm{d}s$; à tout instant $t \geqslant t_1$, l'énergie emmagasinée dans le condensateur vaut $E(t) = E(t_1) + \int_{t_1}^{t} Cu(s)u'(s)\,\mathrm{d}s$.

Q 6. Déterminer $E(t_1)$ en fonction de u_0 et C.

Q 7. Exprimer la valeur de l'énergie $E(t)$ à tout instant $t \geqslant t_1$, en fonction de C et $u(t)$.

Q 8. L'énergie $E(t)$ possède-t-elle une limite finie quand $t \to +\infty$? Si oui, donner la valeur de cette limite.

II La méthode d'Euler

II.A – Résultats préliminaires

II.A.1)

Q 9. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$.

Q 10. Donner une représentation graphique de cette inégalité.

II.A.2)

Q 11. Montrer que $\dfrac{\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 1$.

Q 12. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{x}{n} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Q 13. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{\ln(1 + x/n)}{1/n}$ est bien définie pour tout $n \geqslant N$, montrer qu'elle converge et déterminer sa limite.

Q 14. En déduire que $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{e}^x$.

II.A.3)

Q 15. Montrer l'existence de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - 1 + x}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$ et déterminer sa valeur.

II.B – Schéma d'approximation par la méthode d'Euler

Fixons des réels $\lambda > 0$, $c \in \mathbb{R}$ et $T > 0$. Considérons l'équation différentielle suivante où l'inconnue est la fonction y :

$$\forall t \in [0, T], \quad y'(t) = -\lambda y(t) \tag{II.1}$$

On note f l'unique solution de l'équation (II.1) vérifiant la condition initiale $y(0) = c$. On se propose de calculer de manière approchée la fonction f à l'aide de la méthode d'Euler.

Pour cela, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

— on partage le segment $[0, T]$ en N segments $[t_n, t_{n+1}]$ $(0 \leqslant n \leqslant N-1)$ de même longueur $h > 0$, on a donc $h = T/N$ et $\forall n \in [\![0, N]\!]$, $t_n = nh$;

— on définit la suite (y_n) par récurrence de la manière suivante
- $y_0 = f(0)$;
- pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$, si D_n est la droite passant par le point de coordonnées (t_n, y_n) de coefficient directeur $-\lambda y_n$, alors y_{n+1} est l'ordonnée du point de D_n d'abscisse t_{n+1}.

Q 16. Donner la valeur de $f(t)$, pour tout $t \in [0, T]$.

Q 17. Pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$, déterminer une équation cartésienne de la droite D_n.

Q 18. Montrer que, pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$, $y_{n+1} = (1 - \lambda h)y_n$.

Q 19. On suppose dans cette question seulement que $c = 1$, $\lambda = 1$, $T = 1$ et $h = 1/10$. Représenter sur un même graphique la courbe représentative de la solution f de l'équation (II.1) correspondant à ces valeurs numériques, les droites D_0, D_1 et D_2 ainsi que les points de coordonnées (t_n, y_n) et $(t_n, f(t_n))$ pour $n \in [\![0, 3]\!]$, en précisant les valeurs de ces coordonnées (on donnera une approximation de ces valeurs à 10^{-3} près).

Q 20. Pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, exprimer le terme général y_n en fonction de n, c, λ et h.

Q 21. En déduire l'existence et la valeur de la limite $\lim\limits_{N \to +\infty} y_N$. (*On rappelle que $h = T/N$.*)

II.C – Étude de l'erreur de consistance du schéma d'approximation

On pose, pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, $\varepsilon_n(h) = f(t_n) - (1-\lambda h) f(t_{n-1})$ et $\varepsilon(h) = \sum_{n=1}^{N} |\varepsilon_n(h)|$. Le réel $\varepsilon(h)$ est l'*erreur de consistance du schéma* : cette erreur résulte directement du schéma d'approximation, indépendamment des erreurs dues aux arrondis dans les calculs.

Q 22. Montrer que, pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, $\varepsilon_n(h) = c\mathrm{e}^{-\lambda t_{n-1}}(\mathrm{e}^{-\lambda h} - 1 + \lambda h)$.

Q 23. Soit $n \in [\![1, N]\!]$. Déterminer le signe du réel $\mathrm{e}^{-\lambda t_{n-1}}(\mathrm{e}^{-\lambda h} - 1 + \lambda h)$.

Q 24. Montrer l'égalité $\varepsilon(h) = |c|(\mathrm{e}^{-\lambda h} - 1 + \lambda h)\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\lambda T}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda h}}$.

Q 25. En déduire que $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

On dit dans ce cas que le schéma d'approximation est consistant.

II.D – Étude de la stabilité du schéma d'approximation

On considère, dans cette sous-partie II.D uniquement, que la suite (y_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (*i.e.* que l'on approxime les solutions de l'équation (II.1) sur $[0, +\infty[$). $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc la suite définie par $y_0 = c$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = (1-\lambda h) y_n$. De même, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = nh$.

En pratique, le calcul numérique des termes de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est soumis à des erreurs d'arrondis : par exemple, chaque nombre est calculé avec une précision limitée par le codage des nombres flottants. Pour simplifier, on suppose que l'erreur d'arrondi $\eta \neq 0$ est constante à chaque itération. Lorsqu'on souhaite calculer les termes y_n comme dans la sous-partie II.B, à cause des erreurs d'arrondi, on calcule en fait les termes de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où z_0 est une valeur approchée de y_0 et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = (1-\lambda h) z_n + \eta$$

On cherche à savoir si le schéma d'approximation tend à amplifier ou à réduire les erreurs d'arrondis. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = z_n - y_n$. On note $a = 1 - \lambda h$ et $r = \dfrac{\eta}{1-a}$. On pose enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - r$.

II.D.1)

Q 26. Vérifier que r est bien défini.

Q 27. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a u_n + \eta$.

Q 28. Établir que la suite de terme général v_n est géométrique. En déduire une expression du terme général v_n, puis du terme général u_n, en fonction de n, a, y_0, z_0 et η.

II.D.2)

Q 29. On suppose $u_0 \neq r$. Montrer que la suite (u_n) est bornée si et seulement si $|a| \leqslant 1$.

Q 30. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur h et λ pour que la suite (u_n) soit bornée quelle que soit la valeur de η.

On dit que le schéma d'approximation est conditionnellement stable.

II.D.3) Exemple

Q 31. On suppose dans cette question que $\lambda = 100$, $c = 1$ et $z_0 = y_0$. Donner une valeur de h pour laquelle la suite $(f(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée tandis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne l'est pas.

III Étude de la stabilité d'un schéma numérique dans le cas d'un système différentiel

III.A – Étude d'un système différentiel

III.A.1) On considère le système différentiel

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} y_1'(t) = -\dfrac{3}{2} y_1(t) + \dfrac{1}{2} y_2(t) \\ y_2'(t) = \dfrac{1}{2} y_1(t) - \dfrac{3}{2} y_2(t) \end{cases}$$

Q 32. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que ce système puisse s'écrire sous la forme de l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = AY(t) \tag{III.1}$$

où l'inconnue est la fonction $Y : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

Q 33. Justifier, sans aucun calcul, que la matrice A est diagonalisable.

Q 34. On pose $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Justifier qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité : $D = P^{-1}AP$. On ne demande pas de calculer la matrice P.

Q 35. Résoudre le système différentiel $\forall t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = DX(t)$, où l'inconnue est la fonction $X : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

III.A.2)

Q 36. Montrer que, pour tout $h > 0$, la matrice $I_2 - hA$ est inversible.

Q 37. Soit $h > 0$. On pose $B_h = (I_2 - hA)^{-1}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice B_h^n est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{(1+h)^n} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(1+2h)^n} \end{pmatrix}$.

Q 38. En déduire que pour tout $U \in \mathbb{R}^2$, la suite de terme général $B_h^n U$ converge vers le vecteur $0_{\mathbb{R}^2}$.

III.B – Méthode d'Euler

On considère un vecteur $C \in \mathbb{R}^2$ et le système différentiel suivant

$$\forall t \in [0, T], \quad Y'(t) = AY(t) \tag{III.2}$$

On note $F : [0, T] \to \mathbb{R}^2$ l'unique solution du système (III.2) vérifiant la condition initiale $Y(0) = C$.

Q 39. Montrer, pour tout $t \in]0, T]$, l'existence dans $\mathbb{R}^2$ de $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h}(F(t) - F(t - h))$ et préciser sa valeur.

Soit $h > 0$. Pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, on note $Y_n \in \mathbb{R}^2$ une valeur approchée de $F(t_n)$. En tout point t_n, $1 \leqslant n \leqslant N$, on approche le vecteur dérivé $F'(t_n)$ par le taux d'accroissement $\dfrac{1}{h}(Y_n - Y_{n-1})$. On calcule les termes de la suite (Y_n) en posant :

$$\forall n \in [\![1, N]\!], \quad \frac{1}{h}(Y_n - Y_{n-1}) = AY_n$$

Q 40. Montrer que pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$, $Y_{n+1} = B_h Y_n$.

Q 41. En déduire Y_N en fonction de B_h, Y_0 et N.

On considère qu'à chaque itération on effectue le calcul avec une erreur d'arrondi constante égale à $V \in \mathbb{R}^2$. On définit les suites (Y_n) et (Z_n) à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ par leurs premiers termes Y_0 et Z_0 et les relations de récurrence, valables pour tout $n \in \mathbb{N}$: $Y_{n+1} = B_h Y_n$ et $Z_{n+1} = B_h Z_n + V$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = Z_n - Y_n$.

Q 42. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = B_h U_n + V$.

Q 43. Démontrer que la matrice $I_2 - B_h$ est inversible.

Q 44. On note $U_\infty = (I_2 - B_h)^{-1}V$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_\infty = B_h(U_n - U_\infty)$.

Q 45. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = (I_2 - B_h^n)U_\infty + B_h^n U_0$.

Q 46. En déduire que la suite (U_n) est bornée dans $\mathbb{R}^2$ quelle que soit la valeur de l'erreur V et quel que soit le nombre $h > 0$.

On dit dans ce cas que la méthode d'approximation est stable.

• • • FIN • • •
