I Décharge et charge d'un condensateur

I.A—

Q1. Les solutions de l'équation linéaire homogène (I1), sont les fonctions $\varphi_A : x \mapsto A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

La fonction u est la fonction $\varphi_{u_0} : t \mapsto u_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ où u_0 la constante strictement positive définie dans l'énoncé.

Q2. On demande de résoudre l'inéquation $u(t) \leq \frac{1}{10}\,u_0$ i.e. $u_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \leq \frac{1}{10}\,u_0$. Résolvons cette inéquation :

$u_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \leq \frac{1}{10}\,u_0$ ssi $\mathrm{e}^{-t/\tau} \leq \frac{1}{10}$ (puisque $u_0 \neq 0$) ssi $\frac{-t}{\tau} \leq \ln\frac{1}{10}$ i.e. $\frac{-t}{\tau} \leq -\ln 10$ et il vient : $t \geq \tau\ln 10$

C'est à partir de l'instant $t_1 = \tau\ln 10$, que la tension $u(t)$ devient inférieure à 10% de sa valeur initiale u_0.

I.B—

Q3. Calculons les solutions de l'équation avec second membre (I2).

Nous avons déterminé les solutions de l'équation homogène, à la question (Q1). Par ailleurs il y a une solution évidente constante $y_0(t) = U$ de l'équation complète. Alors les solutions de l'équation (I2) sont les fonctions :

$$f_A : t \mapsto U + A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

— Pour $t \leq t_1$ on a vu que $u = \varphi_{u_0}$. De plus, au temps t_1 on a $u(t_1) = \frac{1}{10}u_0$.

— Enfin, pour $t \geq t_1$, $u(t)$ vérifie l'équation (II2), c'est-à-dire qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall t \geq t_1,\ u(t) = f_A(t)$

On doit avoir $f_A(t_1) = \frac{1}{10}u_0$, d'où $U + A\,\mathrm{e}^{-t_1/\tau} = \frac{1}{10}u_0$, qui donne $U + A\,\frac{1}{10} = \frac{1}{10}u_0$ et donc : $A = u_0 - 10\,U$.

On a donc : $\forall t \geq t_1,\quad u(t) = U + (u_0 - 10\,U)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

Rem.— Voici d'autres expressions de $u(t)$ (en utilisant que $10 = \mathrm{e}^{t_1/\tau}$), valables pour $t \geq t_1$:

$u(t) = u_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + U\left[1 - \mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau}\right] = \frac{u_0}{10}\,\mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau} + U\left[1 - \mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau}\right]$ *ou encore* $U + \left(\frac{u_0}{10} - U\right)\mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau}$

Q4. Pour $t \leq t_1$, on a $u(t) = u_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$: on reconnait une « exponentielle décroissante ».

Pour $t \geq t_1$, on a $u(t) = U + (u_0 - 10\,U)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ qui varie comme son second terme $(u_0 - 10\,U)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$

— Si $U < \frac{u_0}{10}$, on a $u_0 - 10\,U > 0$ et donc la fonction u est croissante sur $[t_1, +\infty[$.

— Si $U = \frac{u_0}{10}$, la fonction u est constante de valeur U.

— Si $U > \frac{u_0}{10}$, on a $u_0 - 10\,U < 0$ donc la fonction u est décroissante.

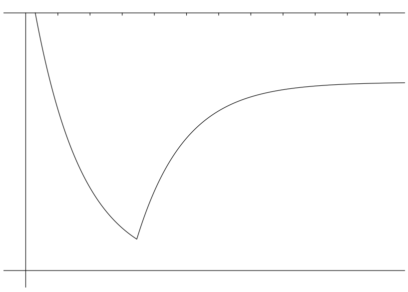
Dans tous les cas,

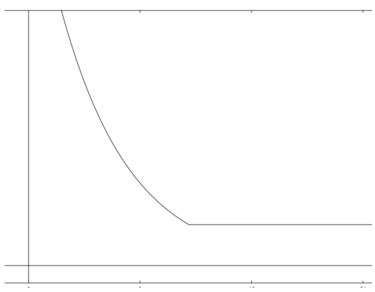
— La dérivée à gauche en t_1 est $u'_g(t_1) = \frac{-1}{\tau}u_0\,\mathrm{e}^{-t_1/\tau} = -\frac{1}{\tau}\,\frac{u_0}{10}$.

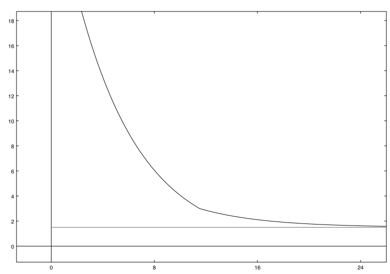
— La dérivée à droite en t_1 est $u'_d(t_1) = \frac{-1}{\tau}(u_0 - 10\,U)\,\mathrm{e}^{-t_1/\tau} = \frac{1}{\tau}\left(U - \frac{u_0}{10}\right)$ puisque $\mathrm{e}^{-t_1/\tau} = \frac{1}{10}$.

— La limite en $+\infty$ est U

Q5. Par exemple







I.C—

Q6. Pour $t \in [0, t_1]$, on a $\displaystyle\int_0^t C\,u(s)u'(s)\,\mathrm{d}s = C\left[\tfrac{1}{2}u(s)^2\right]_0^t = \tfrac{1}{2}C\,u(t)^2 - \tfrac{1}{2}C\,u_0^2$ d'où $\mathrm{E}(t) = \frac{1}{2}\,C\,u(t)^2$.

En particulier : $\mathrm{E}(t_1) = \frac{1}{2}C\,\frac{u_0^2}{100}$.

Q7. Pour $t \geq t_1$, on a aussi $\displaystyle\int_{t_1}^t C\,u(s)u'(s)\,\mathrm{d}s = C\left[\tfrac{1}{2}u(s)^2\right]_{t_1}^t = \tfrac{1}{2}C\,u(t)^2 - \tfrac{1}{2}C\,u(t_1)^2$ et donc $\mathrm{E}(t) = \frac{1}{2}\,C\,u(t)^2$.

Q8. On a vu plus haut que $\lim\limits_{+\infty} u = U$, on en déduit : $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{E} = \frac{1}{2}\,C\,U^2$.

II la méthode d'Euler

II.A — Résultats préliminaires

II.A.1)

Q9. Considérons la fonction auxiliaire $\varphi : x \mapsto e^{-x} - 1 + x$. Elle est partout dérivable, et l'on a $\varphi'(x) = 1 - e^{-x}$. C'est une fonction strictement croissante, et puisque $\varphi'(0) = 0$: φ' est négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$. La fonction φ atteint donc un minimum en $x = 0$, et puisque $\varphi(0) = 0$, on a démontré : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) \geq 0$ i.e. $e^{-x} \geq 1 - x$.

Q10. La représentation graphique de l'exponentielle décroissante $x \mapsto e^{-x}$, est donc en tout point au-dessus de sa tangente en 0, d'équation $y = 1 - x$.

II.A.2)

Q11. Une telle propriété est bien entendu du cours de première année, mais il faut bien comprendre que l'énoncé en demande une (re-)démonstration. Il faut reconnaître le taux d'accroissement de la fonction $t \mapsto \ln t$ en $t = 1$:

$$\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{\ln(1+\varepsilon) - \ln 1}{(1+\varepsilon) - 1} \longrightarrow \ln'(1) = 1$$

Q12. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x}{n} = 0$ et donc en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dans la définition de cette limite, il vient :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies \left|\frac{x}{n}\right| < \frac{1}{2}\text{, c'est-à-dire : } -\frac{1}{2} < \frac{x}{n} < \frac{1}{2}$$

Q13. Notons $\varepsilon_n = \frac{x}{n}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. La quantité $\ln(1+\varepsilon_n)$ est bien défini pour $n \geq N$, puisqu'alors $1 + \frac{x}{n} > 0$. par composition des limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$. Puis : $u_n = \frac{\ln(1+x/n)}{1/n} = x\,\frac{\ln(1+x/n)}{x/n} = x\,\frac{\ln(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n}$ a pour limite x quand $n \to +\infty$ (produit des limites).

Q14. Par définition des puissances généralisées : $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+\frac{x}{n})} = e^{u_n}$ en notant $u_n = \frac{\ln(1+x/n)}{1/n}$ (comme ci-dessus). Alors par continuité de l'exponentielle : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

II.A.3)

Q15. Utilisons un développement limité : $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ donne $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. On en déduit :

$$e^{-x} - 1 + x \sim_0 \frac{x^2}{2}, \qquad 1 - e^{-x} \sim_0 x, \qquad \frac{e^{-x} - 1 + x}{1 - e^{-x}} \sim_0 \frac{x}{2} \quad \text{et donc : } \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1 + x}{1 - e^{-x}} = 0.$$

II.B — Schéma d'approximation par la méthode d'Euler

Q16. Les solutions de l'équation différentielle étant les fonctions $y(t) = A\,e^{-\lambda t}$, si on impose $y(0) = c$ on obtient la fonction : $f(t) = c\,e^{-\lambda t}$. Cette fonction est solution sur l'intervalle $\mathbb{R}$ tout entier, mais suivant l'énoncé, $f : [0, T] \to \mathbb{R}$.

Q17. La droite passe par le point (t_n, y_n) et donc une équation de D_n est de la forme $y = y_n + \alpha_n(t - t_n)$. Le réel α_n est le coefficient directeur, donné dans l'énoncé, et on obtient l'équation : $y = y_n - \lambda y_n(t - t_n)$.

Q18. La valeur y_{n+1} est l'ordonnée du point de D_n d'abscisse t_{n+1} d'où, en utilisant que $t_{n+1} = t_n + h$:

$$y_{n+1} = y_n - \lambda y_n(t_{n+1} - t_n) = y_n - \lambda y_n h = y_n(1 - \lambda h)$$

Q19. Dans cette question, afin de produire une illustration graphique, on considère $f(t) = e^{-t}$ sur le segment $[0, 1]$.

Q20. Depuis la question (Q18) nous savons que la suite $(y_0, \ldots, y_N)$ est en progression géométrique, de raison $q = 1 - \lambda h = 1 - \frac{\lambda T}{N}$. Alors pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, $y_n = y_0\left(1 - \frac{\lambda T}{N}\right)^n = c\left(1 - \frac{\lambda T}{N}\right)^n$.

Q21. La valeur approchée y_N de $f(T)$ est donc : $y_N = c\left(1 - \frac{\lambda T}{N}\right)^N$. La suite $N \mapsto \left(1 - \frac{\lambda T}{N}\right)^N$ est du type $\left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$ et nous avons trouvé sa limite à la question (Q14) : elle tend vers $e^x = e^{-\lambda T}$.

II.C — Étude de l'erreur de consistance du schéma d'approximation

Q22. Calculons $\varepsilon_n(h) = f(t_n) - (1 - \lambda h) f(t_{n-1})$:

$$\varepsilon_n(h) = c\,e^{-\lambda(t_{n-1}+h)} - (1 - \lambda h)\,c\,e^{-\lambda t_{n-1}} = c\,e^{-\lambda t_{n-1}}\left[e^{-\lambda h} - (1 - \lambda h)\right]$$

Q23. Nous avons vu à la question (Q9) : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} - 1 + x \geq 0$. Alors $e^{-\lambda h} - 1 + \lambda h \geq 0$, et donc : $\varepsilon_n(h) \geq 0$.

Q24. Puisque les $\varepsilon_n(h)$ sont positifs, on a $|\varepsilon_n(h)| = |c|\,e^{-\lambda t_{n-1}}\,\varphi(h)$ où l'on note $\varphi(h) = e^{-\lambda h} - (1 - \lambda h)$:

$$\varepsilon(h) = \sum_{n=1}^{N} |\varepsilon_n(h)| = |c|\,\varphi(h) \sum_{n=1}^{N} e^{-\lambda t_{n-1}} = |c|\,\varphi(h) \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\lambda k h} = |c|\,\varphi(h)\,\frac{1 - e^{-\lambda N h}}{1 - e^{-\lambda h}} = |c|\,\varphi(h)\,\frac{1 - e^{-\lambda T}}{1 - e^{-\lambda h}}$$

Q25. Faisons apparaître l'expression vue à la question (Q15) :

$$\varepsilon(h) = |c|\,\frac{e^{-\lambda h} - 1 + \lambda h}{1 - e^{-\lambda h}}\left[1 - e^{-\lambda T}\right] \quad \text{et donc (produit des limites : } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = |c| \cdot 0 \cdot \left[1 - e^{-\lambda T}\right] = 0$$

II.D — Étude de la stabilité du schéma d'approximation

II.D.1)

Q26. Le pas du schéma d'approximation est un réel $h>0$, et depuis le début de la partie II, l'énoncé a fixé un réel $\lambda>0$. Alors on a $1-a\neq 0$ et donc r est bien défini.

Q27. On a $z_{n+1} = a z_n + \eta$ et $y_{n+1} = a y_n$, alors il vient :

$$z_{n+1} - y_{n+1} = a z_n + \eta - a y_n = a\left[z_n - y_n\right] + \eta \quad \text{i.e.} \quad u_{n+1} = a u_n + \eta$$

Q28. Le réel r vérifie $r = ar + \eta$, et donc :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - r = \left(a u_n + \eta\right) - \left(ar + \eta\right) = a u_n - ar = a\left(u_n - r\right) = a v_n$$

On en déduit : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n = v_0 a^n = (u_0 - r)a^n = \left[z_0 - y_0 - \frac{\eta}{1-a}\right] a^n$.

Alors : $$u_n = v_n + r = \left[z_0 - y_0 - \frac{\eta}{1-a}\right] a^n + \frac{\eta}{1-a}.$$

II.D.2)

Q29. On suppose $u_0 \neq r$, c'est-à-dire que la quantité $C = z_0 - y_0 - \frac{\eta}{1-a}$ est non nulle. On a : $u_n = C\,a^n + \frac{\eta}{1-a}$.

— Si $|a|\leq 1$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n| = |C\,a^n| + |\frac{\eta}{1-a}|$ (inégalité triangulaire), d'où :

$$|u_n| = |C[\,|a|^n + |\frac{\eta}{1-a}| \leq |C[+ |\frac{\eta}{1-a}|$$

Ainsi la suite (u_n) est bornée par $M = |C[+ |\frac{\eta}{1-a}|$.

— Réciproquement, démontrons : si la suite (u_n) est bornée, alors $|a|\leq 1$. Choisissons de démontrer cet énoncé sous sa forme contraposée, qui s'énonce : « si $|a|>1$ alors la suite (u_n) n'est pas bornée ». Supposons donc $|a|>1$. Par la seconde inégalité triangulaire : $|u_n| \geq |C\,a^n| - |\frac{\eta}{1-a}| = |C|\cdot|a|^n - |\frac{\eta}{1-a}|$. Puisque $|c|\cdot|a|^n \longrightarrow +\infty$, on a aussi $|u_n| \longrightarrow +\infty$: la suite (u_n) n'est donc pas bornée.

Q30. Traduisons la condition $|a|\leq 1$ obtenue plus haut : $|1-\lambda h|\leq 1$, ou plus clairement $-1\leq 1-\lambda h\leq 1$, ou encore de façon équivalente $-1\leq \lambda h - 1\leq 1$, soit enfin (puisque λ et h sont >0) :

$$\lambda h \leq 2$$

Pour un tel couple (λ, h), la suite (u_n) est bornée (sans aucune condition portant sur l'erreur d'arrondi η).

II.D.3)

Q31. Dans cette question, nous avons $u_n = \frac{\eta}{1-a} - \eta\,\frac{a^n}{1-a}$ et $f(t_n) = f(nh) = \mathrm{e}^{-100nh}$.

— Pour tout $h>0$, la suite $\left(f(t_n)\right)_n$ est bornée puisque de limite finie (égale à 0).

— Mais par exemple pour $h=1$, il vient $|a| = 99 > 1$: la suite (u_n) n'est pas bornée.

III Étude de la stabilité d'un schéma numérique dans le cas d'un système différentiel

III.A — Étude d'un système différentiel

III.A.1)

Q32. Soit $\mathrm{Y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t)\end{bmatrix}$, le système différentiel est équivalent à $\mathrm{Y}'(t) = A\mathrm{Y}(t)$, si l'on pose : $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3\end{bmatrix}$.

Q33. La matrice A est une matrice symétrique réelle, donc elle est diagonalisable.

Q34. Calculons le polynôme caractéristique de A. Pour cela, notons $B = 2A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3\end{bmatrix}$:

$$\chi_A(\lambda) = \det \tfrac{1}{2}\left(2\lambda \mathrm{I} - B\right) = \tfrac{1}{4}\begin{vmatrix} 2\lambda+3 & -1 \\ -1 & 2\lambda+3\end{vmatrix} = \tfrac{1}{4}\left[(2\lambda+3)^2 - 1\right] = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

$\Delta = 9-8 = 1$, et donc χ_A admet deux racines distinctes, $\lambda_1 = \frac{-3+1}{2} = -1$ et $\lambda_2 = \frac{-3-1}{2} = -2$.

Alors la matrice A est orthogonalement semblable à la matrice diagonale $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2\end{bmatrix}$, c'est-à- dire qu'il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP = D$.

Q35. La fonction $X(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}$ est solution du système différentiel $X'(t)=DX(t)$, ssi $\begin{cases}x_1'(t)=-x_1(t)\\x_2'(t)=-2x_2(t)\end{cases}$, ssi il existe donc deux constantes $A,B\in\mathbb{R}$ vérifiant : $\begin{cases}x_1(t)=A\,\mathrm{e}^{-t}\\x_2(t)=B\,\mathrm{e}^{-2t}\end{cases}$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

III.A.2)

Q36. Soit un réel $h>0$, le scalaire $\frac{1}{h}$ n'étant pas valeur propre de A, la matrice $\frac{1}{h}\mathrm{I}-A$ est inversible. Alors si B vérifie $\left(\frac{1}{h}\mathrm{I}-A\right)B=\mathrm{I}_2$ on a aussi $\frac{1}{h}\left(\mathrm{I}-hA\right)B=\mathrm{I}_2$. La matrice $\mathrm{I}-hA$ est donc inversible (d'inverse $\frac{1}{h}B$).

Q37. Reprenons la matrice de passage P de la question $(Q34)$.

$$\mathrm{I}-hA=\mathrm{I}-hP^{-1}DP=P^{-1}(\mathrm{I}-hD)P=P^{-1}\begin{pmatrix}1+h&0\\0&1+2h\end{pmatrix}P$$

La matrice $C_h=\mathrm{I}-hD=\begin{pmatrix}1+h&0\\0&1+2h\end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est $C_h^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{1+h}&0\\0&\frac{1}{1+2h}\end{pmatrix}$. Alors :

$$B_h=\left(\mathrm{I}-hA\right)^{-1}=P^{-1}\begin{pmatrix}1+h&0\\0&1+2h\end{pmatrix}^{-1}P=P^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{1+h}&0\\0&\frac{1}{1+2h}\end{pmatrix}P$$

La matrice B_h est donc semblable à la matrice $\Delta_h=\begin{pmatrix}\frac{1}{1+h}&0\\0&\frac{1}{1+2h}\end{pmatrix}$, Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, B_h^n est semblable à :

$$\Delta_h^n=\begin{pmatrix}\frac{1}{1+h}&0\\0&\frac{1}{1+2h}\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\frac{1}{(1+h)^n}&0\\0&\frac{1}{(1+2h)^n}\end{pmatrix}$$

Q38. Pour tout vecteur $U=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$, notons $PU=\begin{bmatrix}a'\\b'\end{bmatrix}$, on a $B_h^nU=P^{-1}\begin{bmatrix}\frac{a'}{(1+h)^n}\\\frac{b'}{(1+2h)^n}\end{bmatrix}$. Les deux suites $\frac{a'}{(1+h)^n}$ et $\frac{b'}{(1+2h)^n}$ tendent vers 0, et donc :

$$\lim_{n\to+\infty}B_h^nU=P^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=0_{\mathbb{R}^2}$$

III.B — Méthode d'Euler

Q39. La fonction F étant une solution du système différentiel (III.2), elle est dérivable en tout point $t\in\,]0,T[$, dérivable à droite en 0, dérivable à gauche en T. Pour tout $t\in\,]0,T]$ on a donc :

$$\lim_{h\to0^+}\frac{F(t)-F(t-h)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{F(t)-F(t-h)}{t-(t-h)}=F'(t)$$

Q40. Lorsque le pas d'approximation h est suffisamment petit, on a $\frac{1}{h}\left(F(t_n)-F(t_{n-1})\right)\approx F'(t_n)=A\,F(t_n)$.

Le schéma d'Euler consiste à calculer des valeurs approchées Y_n des vecteurs $F(t_n)$, en calculant les Y_n ainsi :

$$\frac{1}{h}\left(\mathrm{Y}_n-\mathrm{Y}_{n-1}\right)=A\mathrm{Y}_n\quad\text{pour tout } n\in[\![1,N]\!]$$

Il vient $\left(\mathrm{I}-hA\right)A_n=A_{n-1}$ pour tout $n\in[\![1,N]\!]$. De façon équivalente, $\left(\mathrm{I}-hA\right)A_{n+1}=A_n$ pour tout $n\in[\![0,N-1]\!]$

Q41. Puisque la matrice $I-hA$ est inversible d'inverse B_h, il vient $A_{n+1}=B_hA_n$ pour tout $n\in[\![0,N-1]\!]$. Alors :

$$A_n=B_h^nA_0\quad\text{pour tout } n\in[\![0,N-1]\!].$$

En particulier : $A_N=B_h^NA_0$.

Q42. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}=Z_{n+1}-Y_{n+1}=\left(B_hZ_n+V\right)-B_hY_n=B_h\left(Z_n-Y_n\right)+V=B_hU_n+V$.

Q43. Les valeurs propres de B_h sont $\frac{1}{1+h}$ et $\frac{1}{1+2h}$ (question Q37). En particulier le réel 1 n'est pas valeur propre :

La matrice $\mathrm{I}-B_h$ est inversible.

Q44. Avec les notation de l'énoncé :

$$U_{n+1}-B_hU_n=V=(\mathrm{I}-B_h)U_\infty\quad\text{et donc}\quad U_{n+1}-U_\infty=B_hU_n-B_hU_\infty=B_h\left(U_n-U_\infty\right)$$

Q45. La suite (V_n) définie par $V_n=U_n-U_\infty$ est géométrique, d'où : $\forall n\in\mathbb{N}$, $V_n=B_h^n\,V_0=B_h^n\left(U_0-U_\infty\right)$. Alors :

$$U_n=U_\infty+B_h^n\,U_0-B_h^nU_\infty=\left(\mathrm{I}-B_h^n\right)U_\infty+B_h^n\,U_0$$

Q46. On a $U_n=U_\infty-B_h^nU_\infty+B_h^n\,U_0$. En utilisant la question (Q38) : $\lim_{n\to+\infty}B_h^nU_\infty=\lim_{n\to+\infty}B_h^nU_0=0_{\mathbb{R}^2}$.

La suite (U_n) converge dans $\mathbb{R}^2$, c'est donc une suite bornée de vecteurs.