DS N°01. TSI2

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Samedi 21 septembre 2019

Les différents exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

EXERCICE 01

On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_1) : z^2 + z + 1 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_2) : z^4 = j$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_3) : z^8 + z^4 + 1 = 0$.
4. En déduire la factorisation de $X^8 + X^4 + 1$ en produit de polynômes irréductibles du second degré dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
5. Retrouver la décomposition en produit de polynômes irréductibles du second degré dans $\mathbb{R}[X]$ de $X^8 + X^4 + 1$ en remarquant que
$$X^4 + X^2 + 1 = X^4 + 2X^2 + 1 - X^2 \text{ et } X^4 - X^2 + 1 = X^4 + 2X^2 + 1 - 3X^2.$$

EXERCICE 02

On considère ici :

$$A = \left\{ \left(\frac{m+n+1}{m+n}\right)^{m+n}, \ (m,n) \in \mathbb{N}^{\star 2} \right\}.$$

1. En étudiant la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$, montrer :
$$\forall x \in]-1, +\infty[, \ \ln(1+x) \leqslant x.$$
2. Montrer que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^{\star 2}$,
$$\left(\frac{m+n+1}{m+n}\right)^{m+n} = \exp\left((m+n)\ln\left(1 + \frac{1}{m+n}\right)\right).$$
En déduire un majorant de A.
3. Monter l'existence de $\sup(A)$.
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{2n}$. En déduire alors la valeur de $\sup(A)$.

T.S.V.P $\rightarrow$

EXERCICE 03

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels convergente telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2} < u_n < 1.$$

On introduit une nouvelle suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$v_0 = u_0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^\star,\ v_n = \frac{v_{n-1} + u_n}{1 + u_n v_{n-1}}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $1 - v_n = \dfrac{(1-u_n)(1-v_{n-1})}{1 + u_n v_{n-1}}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n < 1$.
3. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et trouver son sens de monotonie.
4. On appelle l la limite finie de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Justifier l'existence de l.
   (b) On suppose $0 \leqslant l < 1$. En utilisant $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, que peut-on conclure ?
   (c) En déduire la valeur de l.

EXERCICE 04

On veut étudier la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x}\right)$.

1. Dresser le tableau de variation de la fonction $u : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x}$ sur son domaine de définition.
2. En déduire le domaine de définition de f.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de f.
   En déduire la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en 0.
5. Tracer la courbe représentative de f en n'oubliant pas les tangentes aux points intéressants.