Devoir libre n°01

2TSI. Mathématiques

A rendre le vendredi 04 octobre 2019

Les trois exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Le premier exercice permet de revoir encore une fois les nombres complexes et le lien entre les complexes et la géométrie plane. Le second exercice traite des fonctions** sh **et** ch **qui ne sont pas au programme officiel mais c'est toujours bon de les avoir vues, le troisième traite d'une suite définie par une récurrence et on termine par l'indispensable T.A.F.

Exercice 01

Posé à l'oral du Concours Banque PT en 2016

On considère $f : z \mapsto \dfrac{z}{z+2}$, définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$ sur un ensemble E à déterminer.
2. Déterminer tous les complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$ et déterminer tous les complexes z tels que $f(z) \in i\,\mathbb{R}$.
3. Trouver une relation entre les modules de $f(z) - 1$ et de $z + 2$, puis trouver une relation entre les arguments de ces deux expressions.
4. On note C l'ensemble des points du plan situés à une distance $R > 0$ de A d'affixe -2. Déterminer l'image de C par f.

Exercice 02

Extrait de l'écrit des Concours Communs Polytechniques en 2016 pour la filière TPC

On considère deux fonctions, notées ch et sh, définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\,(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \mathrm{sh}\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. On étudie ici ch et sh.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2\,(x) - \mathrm{sh}^2\,(x) = 1$.
   (b) Déterminer les dérivées de ch et de sh en fonction d'elles-mêmes et étudier les variations de ces deux fonctions.
2. On pose dans cette question : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}\,(x) = \dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)}$.
   (a) Montrer que th est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On précisera ses limites en $\pm\infty$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x)$.
   (c) Vérifier que th est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   (d) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}^{(n+1)}(x)$ en fonction des dérivées successives $\mathrm{th}^{(k)}(x)$ pour k variant de 0 à n.
   (e) On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \dfrac{\mathrm{th}^{(k)}(0)}{k!}$. Montrer :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$
   (f) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{th}^{(2n)}(0)$. Que vaut alors a_{2n} ?

Exercice 03

Extrait de l'écrit des Concours Communs Polytechniques en 2016 pour la filière TSI

On considère ici la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un premier terme u_0 dans $]0,1[$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1}.$$

On introduit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1. On désire ici encadrer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.
   (b) En déduire que f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Justifier alors, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie.
   (c) En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$.
   (d) En déduire alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
2. On étudie ici la fonction f.
   (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.
   (b) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \geqslant x$.
   (c) Représenter alors la courbe représentative de f sur $[0,1]$.
   (d) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
3. On étudie ici la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Calculer $f(1)$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|1 - u_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}} |1 - u_n|$.
   (c) En déduire alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une majoration de $|1 - u_n|$ en fonction de n et de $|1 - u_0|$.
   (d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.