Exercice 01

1) On considère donc $f : z \mapsto \dfrac{z}{z+2}$, définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$.
Pour montrer que f est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$ sur un ensemble E à déterminer, on pose $z' = f(z) = \dfrac{z}{z+2}$, où z est un complexe différent de -2. Alors :

$$z' = \frac{z}{z+2} \Leftrightarrow z'(z+2) = z \Leftrightarrow z(z'-1) = -2z'.$$

En supposant $z' \neq 1$, on a : $z = \dfrac{2z'}{1-z'}$. Ainsi, f possède une fonction réciproque :

$$f^{-1} : E = \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C} \setminus \{-2\},\ z \mapsto \frac{2z}{1-z}.$$

2) • *Détermination de tous les complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$*
On suppose $z \neq -2$. On a les équivalences :

$$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z}{z+2} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}+2} \Leftrightarrow z\bar{z} + 2z = z\bar{z} + 2\bar{z} \Leftrightarrow z = \bar{z}.$$

Donc : $f(z) \in \mathbb{R}$ si et seulement si z est réel et différent de -2.
• *Détermination de tous les complexes z tels que $f(z) \in i\mathbb{R}$*
On suppose $z \neq -2$. On a les équivalences :

$$f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z}{z+2} = -\frac{\bar{z}}{\bar{z}+2} \Leftrightarrow z\bar{z} + 2z = -z\bar{z} - 2\bar{z} \Leftrightarrow z\bar{z} + z + \bar{z} = 0.$$

Posons $z = x + iy$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$z\bar{z} + z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1.$$

On reconnait une équation du cercle Γ de centre $(-1, 0)$ et de rayon 1. Donc : $f(z) \in i\mathbb{R}$ si et seulement si l'image de z appartient au cercle Γ, privé du point d'affixe -2.
3) Posons $Z_1 = f(z) - 1$ et $Z_2 = z + 2$, avec $z \neq -2$. On a :

$$Z_1 = \frac{z}{z+2} - 1 = \frac{2}{z+2}.$$

Puis : $|Z_1| = \left|\dfrac{2}{z+2}\right| = \dfrac{2}{|z+2|}$.
Puis : $\arg Z_1 = \arg\left(\dfrac{-2}{z+2}\right) = \arg(-2) - \arg(z+2) = \pi - \arg(Z_2)$. On peut résumer :

$$|Z_1| = \frac{2}{|Z_2|} \text{ et } \arg Z_1 = \pi - \arg(Z_2).$$

4) Posons $C = \{z \in \mathbb{C}, |z+2| < R = \{z \in \mathbb{C}, |Z_2| < R$, avec les notations de la question **3)**. On en déduit d'après toujours la question **3)**,

$$|f(z) - 1| = |Z_1| = \frac{2}{|Z_2|} > \frac{2}{R}.$$

Ainsi, f est dans le complémentaire du disque fermé de centre le point d'affixe 1 et de rayon $\frac{2}{R}$.

Exercice 02

1)a) On considère deux fonctions, notées ch et sh, définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On peut alors écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2.$$

Il reste à développer les deux expressions et :

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2\right),$$

ce qui donne bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1.$$

1)b) Les fonctions ch et sh sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ car elles sont des combinaisons linéaires de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Rapidement, on remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x) \text{ et } \operatorname{sh}'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(x).$$

Résumons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x) \text{ et } \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x).$$

Puis, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$. Donc $\operatorname{ch}(x) > 0$ et :

sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Puis $\operatorname{sh}(0) = 0$. Donc la quantité $\operatorname{sh}(x)$ est strictement négative si x est strictement négatif et strictement positive si x est strictement positif. Ainsi, on en déduit le sens de variation de ch.

ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^\star$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Remarque
On peut voir rapidement que ch est paire et que sh est impaire car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch}(x)$ et que $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh}(x)$.

2)a) On pose maintenant : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$.
On sait que $\operatorname{ch}(x) > 0$ pour tout x réel et donc cette quantité ne s'annule jamais. Cela permet de conclure :

th est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Puis, la fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est le rapport de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. La valeur de la dérivée n'est demandée qu'à la question suivante. Attendons donc un peu.

th est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}}{\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

Si x tend vers $+\infty$, $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \sim \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}} = 1$. Donc $\mathrm{th}(x)$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.
Si x tend vers $-\infty$, $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ tend vers $\dfrac{-1}{1} = -1$. Donc $\mathrm{th}(x)$ tend vers -1 quand x tend vers $-\infty$.
On résume :

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = -1 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = 1.$$

Remarque

On a déjà remarqué que sh est impaire et ch est paire. Donc le rapport d'une fonction impaire par une fonction paire étant une fonction impaire, on peut en déduire que th est impaire. La limite $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x)$ est donc logiquement l'opposée de la limite $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x)$, ce qui est le cas.

2)b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{th}'(x) = \left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}\right)' = \frac{\mathrm{sh}'(x)\mathrm{ch}(x) - \mathrm{ch}'(x)\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{\mathrm{ch}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} - \frac{\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}.$$

On obtient bien :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x).$$

Remarque

On a aussi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$, ce qui prouve que th est strictement croissante.
Pour vérifier que th est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, il suffit de remarquer que cette fonction est le rapport de de deux fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On peut alors conclure :

$$\text{th est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.$$

2)d) Exprimons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}^{(n+1)}(x)$ en fonction des dérivées successives $\mathrm{th}^{(k)}(x)$ pour k variant de 0 à n. Pour cela, on va utiliser la formule de Leibniz. Dérivons la relation de la question **2)b)**. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}''(x) = \left(1 - \mathrm{th}^2(x)\right)' = -\left(\mathrm{th}^2(x)\right)'.$$

On en déduit pour tout entier n non nul,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}^{n+1}(x) = -\left(\mathrm{th}^2(x)\right)^n.$$

La fonction $x \mapsto \mathrm{th}(x)$ est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ pour tout entier n, et donc :

$$\forall n \in {}^\star,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}^{n+1}(x) = -\left(\mathrm{th}^2(x)\right)^n = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{th}^{(k)}(x)\mathrm{th}^{(n-k)}(x).$$

2)e) On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \dfrac{\mathrm{th}^{(k)}(0)}{k!}$. On a alors, avec la question précédente :

$$\forall n \in {}^\star,\ \frac{\mathrm{th}^{n+1}(0)}{(n+1)!} = -\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{(n+1)!} \mathrm{th}^{(k)}(0)\mathrm{th}^{(n-k)}(0).$$

Il reste à remarquer que $\dfrac{\binom{n}{k}}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1}.\dfrac{1}{k!}.\dfrac{1}{(n-k)!}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

2)f) th est impaire et toutes ses dérivées successives sont paires ou impaires selon le rang de la dérivée. Ainsi, $\text{th}^{(1)}$ est paire, $\text{th}^{(2)}$ est impaire, $\text{th}^{(3)}$ est paire, et de façon générale la fonction $\text{th}^{(2n+1)}$ est paire pour tout entier n et la fonction $\text{th}^{(2n)}$ est impaire pour tout entier n.
On en déduit que, la fonction $\text{th}^{(2n)}$ étant définie en 0,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \text{th}^{(2n)}(0) = 0.$$

En effet, une fonction impaire définie en 0 s'annule en cette valeur. On en déduit :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = 0.$$

Exercice 03

1)a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + \dfrac{1}{4} - x$. Et donc on a bien :

$$x^2 - x + 1 = \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}.$$

1)b) On introduit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2-x+1}$. En utilisant la question précedente, on remarque que x^2-x+1 est supérieur ou égal à $3/4$. Donc,

$$f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.$$

On considère maintenant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un premier terme u_0 dans $]0,1[$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1}.$$

Comme le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$, $u_1 = f(u_0)$ existe. Supposons que u_n existe pour n donné. Alors $u_{n+1} = f(u_n)$ existe. On peut conclure :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est bien définie.}$$

1)c) Si $x \in [0,1]$, alors $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \in \left[0,\dfrac{1}{4}\right]$ et donc $x^2-x+1 \in [0,1]$. On peut conclure.

$$\text{pour tout } x \in [0,1],\ f(x) \in [0,1].$$

1)d) Comme $u_0 \in]0,1[$, $u_0 \in [0,1]$. Puis en utilisant la question précédente, $u_1 = f(u_0) \in [0,1]$. Supposons $u_n \in [0,1]$. Alors $f(u_n) = u_{n+1} \in [0,1]$ d'après la question précédente.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1].$$

2)a) On ètudie ici la fonction f. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $f(x) = \sqrt{u(x)}$, où u est une fonction dérivable sur$\mathbb{R}$ qui est à valeurs strictement positives (et en particulier ne s'annule pas) et $\sqrt{\ }$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}.$$

2)b) Pour tout $x \in [0,1]$, écrivons les équivalences :

$$f(x) \geqslant x \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1} \geqslant x \Leftrightarrow x^2-x+1 \geqslant x^2 \Leftrightarrow 1 \geqslant x.$$

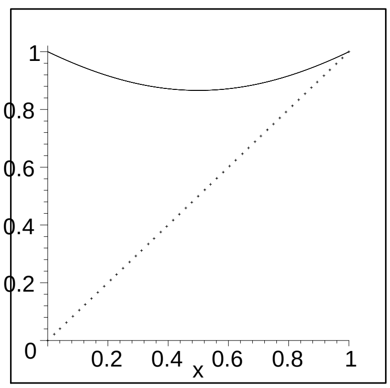
Comme $1 \geqslant x$ est une proposition vraie, il en est de même de $f(x) \geqslant x$.

$$\text{Pour tout } x \in [0,1],\ f(x) \geqslant x.$$

Remarque

On aurait pu poser $g(x) = f(x) - x$ et étudier le signe de g sur $[0,1]$ en dérivant g, mais cette dérivée est un peu technique.

2)c) Représentons alors la courbe de f sur $[0,1]$. Comme $2x-1$ change de signe en $x = 1/2$, une étude rapide du signe de $f''x)$ permet de dire que f décroît sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et croît sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Puis, $f(0) = f(1) = 1$ et $f(1/2) = \sqrt{3}/2$. Enfin, $f'(0) = -1/2$ et $f'(1) = 1/2$, donc la courbe représentative de f possède une tangente de pente $-1/2$ en $(0,1)$, une tangente horizontale en $(1/2, \sqrt{3}/2)$ et une tangente de pente $1/2$ en $(1,1)$.



On trace aussi $y = x$ sur $[0,1]$ pour illustrer l'inégalité de la question **2)b)**.

2)d) Soit $x \in [0,1]$. On a les équivalences :

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \left|\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{(2x-1)^2}{4(x^2-x+1)} \leqslant \frac{1}{3}.$$

(Car toutes les quantités sont positives.) On en déduit :

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3(4x^2-4x+1) \leqslant 4(x^2-x+1) \Leftrightarrow 8x^2-8x-1 \leqslant 0.$$

Étudions le signe de $\phi(x) = 8x^2-8x-1$. On a : $\phi'(x) = 16x-8$, qui s'annule pour $x = 1/2$. Ainsi, ϕ croît sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et décroît sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ avec $\phi(0) = -1$, $\phi(1/2) < 0$ et $\phi(1) = -1$. ϕ est à valeurs négatives sur $[0,1]$ et on a bien le résultat.

$$\text{Pour tout } x \in [0,1],\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3)a) On rappelle l'inégalité des accroissements finis, si f est une fonction dérivable sur $[a,b]$ alors :

$$|f(b)-f(a)| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)||b-a|.$$

On applique avec $b=1$ et $a=u_n$. On a alors $f(1)=1$ et $f(u_n)=u_{n+1}$ et comme :

$$\sup_{t\in[u_n,1]} \left|f'(t)\right| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

On en déduit bien le résultat :

$$\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ |1-u_{n+1}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}|1-u_n|.$$

3)b) On applique l'inégalité précédente pour $n=1$ jusqu'à $n=p$, où p est un entier strictement supérieur à 1 :

$$\left[\begin{array}{ccc} |1-u_1| & \leqslant & \frac{1}{\sqrt{3}}|1-u_0| \\ |1-u_2| & \leqslant & \frac{1}{\sqrt{3}}|1-u_1| \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \left|1-u_p\right| & \leqslant & \frac{1}{\sqrt{3}}\left|1-u_{p-1}\right| \end{array}\right.$$

On fait le produit de toutes ces inégalités :

$$\prod_{n=1}^{p} |1-u_n| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^p \prod_{n=0}^{p-1} |1-u_n|.$$

Il reste à diviser par $\displaystyle\prod_{n=1}^{p-1} |1-u_n|$ de chaque côté et on a (en remplaçant p par n, entier quelconque) :

$$\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ |1-u_n| \leqslant\leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |1-u_0|.$$

3)c) On peut en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n = 0$ et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

Remarque

On a ici non seulement la limite mais aussi la vitesse de convergence. Utile si par exemple, on veut faire un programme python qui affiche une valeur approchée à un ϵ près de l. Entrainez vous !