Devoir libre 02

2TSI. Mathématiques

À rendre le 18 Octobre 2019 au plus tard

Cet exercice a été posé au concours E3A filière PSI en 2019, épreuve de Math 1. Ce n'est qu'une partie (environ le quart) d'un sujet de 4h. Certaines questions ont été rendues plus abordables et graduelles. Le programme de TSI est bien entendu suffisant pour faire ce problème. Le sujet traite de l'étude d'une application linéaire U. Les notions indispensables sont en algèbre : connaître l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ *et sa base canonique, connaître l'espace vectoriel fonctionnel des fonctions continues de* $\mathbb{R}$ *dans lui-même, savoir montrer qu'une application* f *est linéaire (ie* $\forall(\vec{u},\vec{v}) \in E^2$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $f(a\vec{u}+\vec{v}) = af(\vec{u}) + f(\vec{v})$*) et est un endomorphisme c'est-à-dire que l'ensemble d'arrivée est identique à l'ensemble de départ, en plus d'être linéaire, savoir ce qu'est la surjectivité, savoir écrire la matrice d'un endomorphisme. Les notions indispensables en Analyse : savoir faire un changement de variable simple dans une intégrale finie, manipuler la relation de Chasles dans les intégrales, savoir que les primitives d'une fonction continue sont de classe* $\mathcal{C}^1$*, savoir manipuler la linéarité de l'intégrale, savoir intégrer* t^k *entre* $x-1$ *et* x*, pour tout entier* k*, connaître la formule*

$$\left(\int_a^{u(x)} f(t)\,dt\right)' = u'(x)f(u(x)),$$

savoir ce qu'est une fonction T*-périodique.* **Certaines sous-questions sont réservées aux 5/2**.

Dans tout l'exercice, on identifie $\mathbf{R}[X]$ à l'ensemble des fonctions polynomiales. On note $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$, c'est-à-dire que $\mathscr{E} = \mathcal{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

Pour tout élément f de $\mathscr{E}$, on note $U(f)$ l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad U(f)(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)\,dt$$

1. Soit $f \in \mathscr{E}$, T-périodique. Vérifier que : $\forall a \in \mathbf{R}$,
$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_a^0 f(t)\,dt + \int_0^T f(t)\,dt + \int_T^{a+T} f(t)\,dt.$$
Montrer alors, en faisant un changement de variable dans la dernière intégrale que pour tout $a \in \mathbf{R}$,
$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt.$$
2. On suppose de plus dans cette question que f est dérivable sur $\mathbf{R}$.

   Démontrer que si f est T-périodique, il en est de même pour f'

   Montrer que la réciproque est fausse.
3. Montrer que la fonction $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et calculer sa dérivée.
4. Montrer que l'application U qui à $f \in \mathscr{E}$ associe $U(f)$ est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.
5. Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $E_n = \mathbf{R}_n[X]$ et $\mathscr{B}_n = (1, X, \ldots, X^n)$ sa base canonique.
   (a) Montrer que la restriction de U à E_n définit un endomorphisme U_n de E_n.
   (On pourra développer $(x-1)^{k+1}$ avec la formule du binôme de Newton.)
   (b) Écrire la matrice de U_n dans la base $\mathscr{B}_n$.
   (c) L'endomorphisme U_n est-il bijectif ? **Réservé** 5/2 : diagonalisable ?

6. Justifier que, si f, élément de $\mathscr{E}$, est dans $\mathsf{Ker}\,(U)$, alors :

   (i) $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 0$

   (ii) f est périodique de période 1.

7. A-t-on :

$$\mathsf{Ker}\,(U) = \left\{ f \in \mathscr{E},\ \text{périodique de période 1 et telle que } \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \right\} ?$$

8. Montrer que $t \mapsto \cos(2\pi t)$ est un élément de $\mathsf{Ker}\,(U)$ et en donner une représentation graphique sur l'intervalle $[-1, 2]$.

9. L'endomorphisme U est-il surjectif ?

10. Soient a un réel non nul et f_a la fonction sur $\mathbf{R}$ par $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$.

    (a) Déterminer $F_a = U(f_a)$.

    (b) Dresser le tableau des variations de la fonction réelle : $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.

    (c) **Réservé** 5/2 : montrer alors que tout réel λ strictement positif est valeur propre de l'endomorphisme U.