1. $f \in \mathscr{E}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, f est intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Par la relation de Chasles, nous avons d'abord :
$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_a^0 f(t)\,dt + \int_0^T f(t)\,dt + \int_T^{a+T} f(t)\,dt$$
Ensuite, le changement affine de variable : $u = t - T$ dans la dernière intégrale donne grâce à la T-périodicité de f :
$$\int_T^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^a f(u+T)\,du = \int_0^a f(u)\,du = -\int_a^0 f(t)\,dt$$
d'où
$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt}$$

2. Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et T-périodique, alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$, puis en dérivant cette égalité par rapport à x, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x+T) = f'(x)$ donc si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et T-périodique, alors f' est T-périodique.
Par contre, si on considère la fonction identique $x \longmapsto x$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, n'est pas périodique mais sa dérivée est constante sur $\mathbb{R}$ donc périodique (pour n'importe quelle période). Par conséquent, la réciproque étudiée est effectivement fausse : si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et si sa dérivée est T-périodique, alors f n'est pas nécessairement périodique.

3. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet au moins une primitive F sur $\mathbb{R}$, qui est par définition de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Nous avons alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $U(f)(x) = F(x) - F(x-1)$, donc par différence de composées de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, $\underline{U(f) \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$ et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ (U(f))'(x) = f(x) - f(x-1)}$.

4. Comme une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la question précédente prouve que U est une application de $\mathscr{E}$ dans lui-même.
De plus, la linéarité de l'intégration des fonctions continues sur un segment justifie que U est linéaire :
$$\forall (f,g) \in \mathscr{E}^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$U(\lambda.f+g)(x) = \int_{x-1}^x (\lambda.f(t) + g(t))\,dt = \lambda \int_{x-1}^x f(t)\,dt + \int_{x-1}^x g(t)\,dt = \lambda.U(f)(x) + U(g)(x)$$
Par conséquent, U est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

5. **5.1.** Les fonctions polynomiales étant continues sur $\mathbb{R}$, nous pouvons considérer la restriction de U à E_n. Pour justifier que U définit un endomorphisme sur E_n, il suffit de montrer que E_n est stable par U. Pour cela, comme $\mathscr{B}_n$ est une famille génératrice de E_n, il suffit de montrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $U(X^k) \in E_n$.
Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $U(X^k)(x) = \displaystyle\int_{x-1}^x t^k\,dt = \frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{(x-1)^{k+1}}{k+1} = \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} \frac{(-1)^{k-j}}{k+1} x^j$,
autrement dit $U(X^k) = \displaystyle\sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} \frac{(-1)^{k-j}}{k+1} X^j \in E_n$.
Par conséquent, E_n est stable par U et U induit un endomorphisme U_n sur E_n.

5.2. Les calculs effectués dans la question précédente nous permettent d'écrire la matrice A_n de U_n dans la base $\mathscr{B}_n$:
$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \dfrac{(-1)^n}{n+1} \\ 0 & 1 & -1 & & (-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & & (-1)^n \dfrac{n}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

plus précisément, les coefficients de A_n sont $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 1 \leqslant j < i \leqslant n+1 \\ \binom{j}{i-1}\dfrac{(-1)^{j-i}}{j} & \text{si} \quad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n+1 \end{cases}$

5.3. La matrice A_n est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls donc A_n est inversible et par conséquent, U_n est bijectif.
La matrice A_n étant triangulaire, les valeurs propres de U_n sont les coefficients diagonaux de A_n, donc U_n possède une seule valeur propre : 1, de multiplicité $n+1$. Si U_n était diagonalisable, alors A_n serait semblable à I_{n+1} donc égale à I_{n+1}, ce qui n'est pas le cas, donc U_n n'est pas diagonalisable.
(*Autre argument : on pouvait aussi calculer* $\dim \operatorname{Ker}(A_n - I_{n+1}) = n+1-\operatorname{rg}(A_n - I_{n+1}) = 1 \neq n+1$.)

6. Si $f \in \operatorname{Ker}(U)$, alors $U(f)$ est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, d'où :

(i) d'une part, $U(f)(1) = 0$, c'est-à-dire $\boxed{\int_0^1 f(t)\,dt = 0}$,

(ii) et d'autre part, sa dérivée, $U(f)'$, est aussi la fonction nulle, ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f(x-1) = 0$, ce qui prouve que f est périodique de période 1.

7. Réciproquement, si $f \in \mathscr{E}$, périodique de période 1 et telle que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors $U(f)'$ est la fonction nulle, d'où $U(f)$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$ telle que $U(f)(1) = 0$ donc $U(f)$ est la fonction nulle, par conséquent, $\boxed{\operatorname{Ker}(U) = \left\{f \in \mathscr{E},\ \text{périodique de période 1 et telle que } \int_0^1 f(t)\,dt = 0\right\}}$.

8. La fonction $\boxed{f \text{ définie sur } \mathbb{R} \text{ par } t \mapsto \cos(2\pi t)}$ est continue, 1-périodique et vérifie

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \left[\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}\right]_0^1 = 0,$$

donc f est bien une fonction non nulle, élément de $\operatorname{Ker}(U)$.
Sa représentation sur $[-1,2]$ est laissée au lecteur.

9. La fonction valeur absolue est élément de $\mathscr{E}$ mais elle n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc elle n'admet pas d'antécédent par U (d'après **3.**), d'où U n'est pas surjectif.

10. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $f_a : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{at}$.

10.1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_a(x) = U(f_a)(x) = \int_{x-1}^x \mathrm{e}^{at}\,dt = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-a}}{a}\mathrm{e}^{ax}$, donc $\boxed{F_a = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-a}}{a} f_a}$.

10.2. La fonction $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, g est prolongeable par continuité en 0 par $g(0) = 1$, car il est connu que $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.
De plus, g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $g'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$ avec $h(x) = \mathrm{e}^x(x-1)+1$.
h est alors définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $h'(x) = x\mathrm{e}^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, $h'(x)$ est du signe de x, d'où h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $h(0) = 0$, on en déduit que h est positive sur $\mathbb{R}$, et même strictement positive sur $\mathbb{R}^*$.
Par conséquent, g' est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$ et par continuité de g sur $\mathbb{R}$, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ensuite, il est immédiat que $\lim_{-\infty} g = 0$ et par croissance comparée, $\lim_{+\infty} g = +\infty$. On obtient donc le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$+$	‖	$+$	$+$
g	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

10.3. D'après les résultats obtenus dans la question précédente, g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Ainsi, pour tout réel $\lambda > 0$, il existe un réel b tel que $\lambda = g(b)$.

De plus, nous avons vu que si $a \neq 0$, alors $U(f_a) = g(-a) f_a$ donc si $b \neq 0$, $U(f_{-b}) = \lambda . f_{-b}$ où f_{-b} n'est pas la fonction nulle, donc tout réel λ strictement positif et différent de 1 est valeur propre de U. De plus, nous avons vu que $U(1) = 1$ (question **5.**) d'où 1 est valeur propre de U.

En conclusion, tout réel λ strictement positif est valeur propre de l'endomorphisme U.