Devoir surveillé 02

2TSI. Mathématiques

Durée 4 heures. Les calculatrices sont interdites.
L'exercice et le problème sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

EXERCICE

On utilisera Python pour établir les fonctions.

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 9 \\ \forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+1} = 4u_n^3 + 3u_n^4. \end{cases}.$$

1. Écrire une fonction U telle que $U(n)$ renvoie u_n.
   On fera une version récursive et une version itérative.
2. Écrire une fonction S telle que $S(n)$ renvoie $\sum_{k=0}^{n} u_k$.
   On fera une version itérative et une version avec la fonction prédéfinie *sum*.
3. Écrire une fonction C telle que $C(n)$ renvoie le nombre de 9 par lesquels se termine l'écriture en base 10 de u_n. ***Indication : l'idée est qu'un nombre*** v ***qui se termine par*** 9 ***est tel que*** $v\%10$ ***vaille*** 9. ***Donc on initialise le nombre*** i ***de*** 9 ***dans*** $U(n)$ ***à*** 0 ***et on fait une boucle*** *while* ***dans laquelle on rajoute*** 1 ***à*** i ***à chaque étape.***

PROBLEME

n et p étant deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour A appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note A^T la transposée de la matrice A. On rappelle que $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et que par rapport à A, les lignes de A deviennent les colonnes de A^T, dans le sens croissant d'indexation.
Par ailleurs, la transposition est une application linéaire et si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ alors

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $Tr(A)$ sa trace. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite antisymétrique si $A^T = -A$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Enfin, si A est carrée et inversible, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Partie I

On considère dans cette partie uniquement la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2. En déduire que $A^2 + I$ n'est pas inversible.
2. Montrer que les valeurs propres complexes de A sont 0, i et $-i$.
3. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

T.S.V.P $\rightarrow$

5. Calculer PAP^{-1} et en déduire que A est semblable à la matrice B définie par :
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
6. Calculer pour tout $p \in \mathbb{N}$, B^{2p} et B^{2p+1}.
En posant $D = \mathrm{Diag}(1, 1, 0)$, en déduire A^{2p} et A^{2p+1} en fonction de D.

Partie II

Étude de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que tout matrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ est de la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ et $\dim \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
4. Montrer que, $\forall A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, $\det A = 0$.
5. Montrer que, $\forall A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, il existe un unique vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ tel que A soit la matrice de l'application $v \mapsto w \wedge v$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Partie III

On fixe dans cette partie un entier naturel n non nul et une matrice $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Si X est une matrice-colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, quelle est la forme de X^T ? Quel est le nombre de lignes et de colonnes de $X^T BX$, où $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Montrer que, pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et toute matrice carrée B d'ordre n, on a :
$$X^T BX = X^T B^T X.$$
En déduire que $X^T AX = 0$.
3. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $x_1, ..., x_n$ ses coefficients. Calculer $X^T X$.
Puis montrer que $X^T X = 0 \Rightarrow X = 0$.
4. Soit une matrice colonne X telle que $(A + I)X = 0$. En calculant $X^T(A + I)X$ de deux manières différentes, montrer que $X = 0$.
5. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(A + I)$ est réduit au vecteur nul. En déduire que $A + I$ est inversible.
6. Montrer que $B = (I - A)(I + A)^{-1}$ vérifie $B^T B = I$. On dit que B est une matrice orthogonale.
7. Calculer $(I + B)(I + A)$. En déduire que $I + B$ est inversible et trouver son inverse.

Partie IV

On se fixe dans cette partie un entier naturel non nul n et une matrice $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

1. Soit X une matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = AX$. On suppose que $AY = 0$.
Montrer que $A^2X = 0$ puis que $Y^T Y = 0$.
2. Montrer que si $\vec{y} \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$ alors $y = 0$. En déduire que :
$$\mathbb{R}^n = Imf \oplus Kerf.$$
3. En déduire que A est semblable à une matrice bloc de la forme
$$B = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
où C est une matrice carrée d'ordre inférieur ou égal à n.
Pouvez vous justifier pourquoi C est inversible ?