Problème 1

Problème 1, partie I : Isométrie de $\mathbb{R}^3$

Q1. On calcule $A^T A$:

$$A^T A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = I_3.$$

Ainsi

$$\boxed{A \in O_3(\mathbb{R}).}$$

Q2. On calcule le déterminant de la matrice A :

$$\det(A) = \det\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{8}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

En développant ce déterminant par rapport à la deuxième ligne, on obtient :

$$\det(A) = \frac{1}{8}\left(-\sqrt{2}(-\sqrt{2}-\sqrt{2}) + \sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2})\right) = \frac{1}{8}(4+4) = 1.$$

On en conclut que

$$\boxed{\text{L'isométrie associée à la matrice } A \text{ est directe.}}$$

Q3. On cherche dans cette question à expliciter $\ker(A - I_3)$, on a :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A - I_3) &\iff (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}(x - \sqrt{2}y + z) = x \\ \frac{1}{2}(\sqrt{2}x - \sqrt{2}z) = y \\ \frac{1}{2}(x + \sqrt{2}y + z) = z \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} -x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ x - \sqrt{2}y - z = 0 \\ x + \sqrt{2}y - z = 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A - I_3) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & - & \sqrt{2}y & + & z & = & 0 \\ x & - & \sqrt{2}y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & - & \sqrt{2}y & + & z & = & 0 \\ & & -2\sqrt{2}y & & & = & 0 \end{array} \right. \qquad (L_2 \leftarrow L_2 + L_1)$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En conclusion, on a

$$\boxed{\ker(A - I_3) = \text{Vect}(\vec{u}) \text{ avec } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

Remarque. Il est plus habituel lorsque l'on travaille avec des isométries de prendre un vecteur $\vec{u}$ normé, ce que l'on pourrait très bien faire ici (sans que cela ne soit néanmoins une obligation).

Q4. On a :

$$A\vec{j} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Calculons maintenant la quantité $\det(\vec{j}, A\vec{j}, \vec{u})$:

$$\det(\vec{j}, A\vec{j}, \vec{u}) = \frac{1}{2} \det \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \times (-1) \times \begin{vmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} = \boxed{\sqrt{2}}.$$

Q5. On a vu en question 2 que l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A est une isométrie directe. D'après le cours, on en déduit qu'il s'agit d'une rotation vectorielle. La question 3 permet de déterminer les vecteurs invariants de la rotation, et montre qu'il s'agit d'une rotation d'axe $\text{Vect}(\vec{u})$. Il reste à en déterminer l'angle θ.

D'abord, on sait que $\text{Tr}(A) = 1 + 2\cos(\theta) = 1$ donc $\cos(\theta) = 0$. Ensuite, le cours nous dit que $\sin(\theta)$ est du même signe que $\det(\vec{u}, \vec{v}, A\vec{v}) = \det(\vec{v}, A\vec{v}, \vec{u})$ pour tout vecteur $\vec{v}$ non colinéaire à $\vec{u}$ (les deux déterminants sont égaux car on échange deux fois un vecteur). En prenant $\vec{v} = \vec{j}$, il vient de la question précédente que $\sin(\theta) > 0$. Finalement, on trouve $\theta = \pi/2$.

En conclusion

$$\boxed{\text{L'isométrie associée à } A \text{ est une rotation vectorielle autour de } \vec{u} \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}.}$$

Remarque. Si on avait choisi un vecteur $\vec{u}$ de sens opposé à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on aurait trouvé un angle opposé, à savoir $\theta = -\pi/2$.

Problème 1, partie II : espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2

Q6. On a

$$\begin{aligned} E = S_2(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),\ a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } M_2(\mathbb{R}).}$$

Par definition du sous-espace vectoriel engendré, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de E, montrons alors qu'elle est libre. Pour cela, considérons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ainsi la famille est libre.

En conclusion, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E et donc $\boxed{\dim(E) = 3}$.

Q7. Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$ et $M'' = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ b'' & c'' \end{pmatrix}$ trois matrices quelconques de E et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Symétrie : $\varphi(M, M') = aa' + 2bb' + cc' = a'a + 2b'b + c'c = \varphi(M', M)$, donc φ est symétrique.
- Bilinéarité : on a

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda M + M', M'') &= \varphi \left(\begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda b + b' & \lambda c + c' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ b'' & c'' \end{pmatrix} \right) \\ &= (\lambda a + a')a'' + 2(\lambda b + b')b'' + (\lambda c + c')c'' \\ &= \lambda(aa'' + 2bb'' + cc'') + a'a'' + 2b'b'' + c'c'' \\ &= \lambda \varphi(M, M'') + \varphi(M', M''), \end{aligned}$$

donc φ est linéaire par rapport à la première variable. Comme φ est symétrique, on en déduit qu'elle est également linéaire par rapport à la deuxième variable. Ainsi φ est bilinéaire.

- Positivité : $\varphi(M, M) = a^2 + 2b^2 + c^2 \geq 0$, donc φ est positive.
- Caractère défini : on suppose que $\varphi(M, M) = 0$. Donc $a^2 + 2b^2 + c^2 = 0$ d'où $a = b = c = 0$ car on a une somme de carrés nulle. On en déduit que φ est définie.

En conclusion

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

Remarque. En identifiant $M_2(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^4$, on aurait pu remarquer que φ n'est rien d'autre que le produit scalaire euclidien canonique.

Q8. On note N la norme associée à φ, c'est-à-dire $N(M) = \sqrt{\varphi(M,M)}$ pour $M \in E$. Tout d'abord, les trois matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartiennent bien à E, et on a

$$N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{1^2} = 1 \qquad N\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(2\times 1^2)} = 1 \qquad N\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{1^2} = 1.$$

En outre,

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1\times 0 + 2\times 0\times\frac{1}{\sqrt{2}} + 0\times 0 = 0.$$

De même,

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0.$$

Finalement

$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base orthonormée de } E \text{ pour } \varphi.}$$

Problème 1, partie III : Application linéaire sur E

Q9. Pour $M \in E$, on a $f(M) \in E$, donc f est une application de E dans E. Montrons qu'elle est linéaire.
Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in E$, $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
f(\lambda M + M') = f\left(\begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda b + b' & \lambda c + c' \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda a + a' + \lambda c + c'}{2} - (\lambda b + b') & \dfrac{\lambda a + a' - \lambda c - c'}{2} \\ \dfrac{\lambda a + a' - \lambda c - c'}{2} & \dfrac{\lambda a + a' + \lambda c + c'}{2} + (\lambda b + b') \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} \dfrac{a+c}{2} - b & \dfrac{a-c}{2} \\ \dfrac{a-c}{2} & \dfrac{a+c}{2} + b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{a'+c'}{2} - b' & \dfrac{a'-c'}{2} \\ \dfrac{a'-c'}{2} & \dfrac{a'+c'}{2} + b' \end{pmatrix} \\
&= \lambda f(M) + f(M').
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

Q10. On calcule les images par f des trois matrices qui composent la base $\mathscr{B}$:

$$f\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{2}&1\\\sqrt{2}&0&-\sqrt{2}\\1&\sqrt{2}&1\end{pmatrix}=\boxed{\mathrm{A}}.$$

Q11. On sait que l'endomorphisme canoniquement associé à A est une rotation vectorielle autour de $\vec{u}$ et d'angle $\pi/2$. Dans la base $(\vec{u},\vec{j},A\vec{j})$ de $\mathbb{R}^3$ (qui est une base de $\mathbb{R}^3$ car le déterminant de la famille est non nul), la matrice de cette isométrie est donnée par B. Ainsi, on a effectué un changement de base de la base canonique vers la base $(\vec{u},\vec{j},A\vec{j})$ pour se ramener à la forme normale B.

Ici, on part de la base $\mathscr{B}$ et on doit trouver la base $\mathscr{B}'$.

Comme $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, on pose $M_1=1\times\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+0\times\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+1\times\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$.

Comme $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, on pose $M_2=0\times\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+1\times\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+0\times\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

Comme $A\vec{j}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, on pose

$$M_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+0\times\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

La famille (M_1,M_2,M_3) est bien une base de E car les coordonnées de (M_1,M_2,M_3) dans la base $\mathscr{B}$ sont données par $(\vec{u},\vec{j},A\vec{j})$, et que cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$. En conclusion

$$\boxed{\text{La matrice de } f \text{ dans la base } (M_1,M_2,M_3) \text{ est } B.}$$

Q12. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in E$. On a

$$\mathrm{Tr}(f(M)) = \frac{a+c}{2} - b + \frac{a+c}{2} + b = a + c = \mathrm{Tr}(M)$$

et

$$\begin{aligned}
\det(f(M)) &= \left(\frac{a+c}{2} - b\right)\left(\frac{a+c}{2} + b\right) - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 \\
&= \frac{a^2}{4} + \frac{ac}{2} + \frac{c^2}{4} - b^2 - \frac{a^2}{4} + \frac{ac}{2} - \frac{c^2}{4} \\
&= ac - b^2 \\
&= \det(M).
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{f \text{ conserve la trace et le déterminant.}}$$

Problème 2

Problème 2, partie I : étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q13. On a $u_0 = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}t = \boxed{\pi}$, $u_1 = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)\mathrm{d}t = \Big[\sin(t)\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \boxed{2}$ et

$$u_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

Q14. Pour tout $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, on a $\cos(t) \in [0,1]$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que

$$\boxed{u_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t \geq 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},}$$

et on a $\cos^{n+1}(t) \leq \cos^n(t)$ pour tout $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de l'intégrale, il vient que $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, autrement dit

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

Q15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $u_{n+1} = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n+1}(t)\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)\cos^n(t)\mathrm{d}t$ et on effectue une intégration par parties en posant $u(t) = \sin(t)$ et $v(t) = \cos^n(t)$ (qui sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$) :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \underbrace{\Big[\sin(t)\cos^n(t)\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{=0} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(t) \times (-n\cos^{n-1}(t)\sin(t))\mathrm{d}t \\
&= n\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(t)\cos^{n-1}(t)\mathrm{d}t \\
&= n\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\cos^2(t))\cos^{n-1}(t)\mathrm{d}t \\
&= n\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-1}(t)\mathrm{d}t - n\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n+1}(t)\mathrm{d}t \\
&= nu_{n-1} - nu_{n+1}.
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{(n+1)u_{n+1} = nu_{n-1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$$

Q16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $v_n = (n+1)u_{n+1}u_n = nu_{n-1}u_n = nu_nu_{n-1} = v_{n-1}$, et donc

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante égale à } v_0 = u_1u_0 = 2\pi.}$$

Q17. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par décroissance et positivité de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$(n+1)u_{n+1}u_{n+1} \leq (n+1)u_{n+1}u_n \leq (n+1)u_n u_n,$$

soit $(n+1)u_{n+1}^2 \leq v_n \leq (n+1)u_n^2$. Autrement dit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)u_{n+1}^2 \leq 2\pi \leq (n+1)u_n^2.}$$

Q18. On déduit directement de l'encadrement précédent que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{\frac{2\pi}{n+1}} \leq u_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.}$$

Q19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\frac{\sqrt{\frac{2\pi}{n+1}}}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'encadrement suivant :

$$\underbrace{\sqrt{\frac{n}{n+1}}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \leq \frac{u_n}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}} \leq 1.$$

D'après le théorème des gendarmes, on en conclut que

$$\frac{u_n}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

et finalement

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.}$$

Problème 2, partie II : série entière

Q20. $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}.\dfrac{1}{n^{1/2}} \geq 0$ d'après la question Q19.

La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{1/2}}$ diverge car $\dfrac{1}{2} \leq 1$.

D'après le critère d'équivalence pour des séries à termes positifs,

$$\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ diverge.}}$$

Q21. D'après la question Q14. : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.
De plus, $t \mapsto (\cos(t))^n$ est continue et positive sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$,
donc si $u_n = 0$, alors $\forall t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $(\cos(t))^n = 0$, ce qui est absurde.
Par conséquent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0.}$$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n x^n$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \neq 0, |v_n| = u_n |x|^n > 0$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \neq 0, \dfrac{|v_{n+1}|}{|v_n|} = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}|x| \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2\pi}{n+1}}.\sqrt{\dfrac{n}{2\pi}}\ |x|$,

soit $\dfrac{|v_{n+1}|}{|v_n|} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\ |x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|$.

D'après la règle de d'Alembert :
◇ Si $|x| < 1$, la série $\sum |v_n|$ converge, donc la série $\sum u_n x^n$ est absolument convergente et $\mathcal{R} \geq 1$.
◇ Si $|x| > 1$, $|v_n| \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc la suite $(u_n x^n)$ ne converge pas vers 0 et la série $\sum u_n x^n$ diverge grossièrement d'où $\mathcal{R} \leq 1$.

$$\boxed{\text{conclusion : } \mathcal{R} = 1}$$

Q22. Par linéarité de l'intégrale :
$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1;1[,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^k \, dt \right) x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(\cos(t))^k x^k}_{(x\cos(t))^k}\ dt.$
On reconnait la somme des termes d'une suite géométrique de raison $q = x\cos(t) \neq 1$
($|q| < |\cos(t)|$ car $|x| < 1$), d'où :
$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1;1[,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-(x\cos(t))^n}{1-x\cos(t)}\, dt$, et par linéarité de l'intégrale :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1;1[,\ \sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-x\cos(t)}\, dt - x^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos(t))^n}{1-x\cos(t)}\, dt}$$

Q23. $\displaystyle\left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos(t))^n}{1-x\cos(t)}\, dt \right| \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\cos(t)|^n}{|1-x\cos(t)|}\, dt \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|1-x\cos(t)|}\, dt$ car $|\cos(t)| \leq 1$.
Comme $M = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|1-x\cos(t)|}\, dt$ est indépendant de n, la suite $\displaystyle\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos(t))^n}{1-x\cos(t)}\, dt \right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
De plus, $|x| < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$.
Par produit avec une suite bornée, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x^n . \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos(t))^n}{1-x\cos(t)}\, dt = 0$.
En passant à la limite $n \to +\infty$ dans la relation obtenue à la question Q22., on a donc :

$$\boxed{\forall x \in]-1;1[,\ \sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-x\cos(t)}\, dt}$$

Q24. Soit $\phi : \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] & \to & [-1,1] \\ t & \mapsto & \tan\left(\frac{t}{2}\right) = u \end{array}$ $\boxed{\phi \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}$.

Soit $f : \begin{array}{ccc} [-1;1] & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \dfrac{2}{(1-x)+(1+x)\,u^2} \end{array}$

Comme pour $x \in]-1;1[,\ 1-x>0$ et $1+x>0$ et $u^2 \geq 0$, on a donc :
$(1-x)+(1+x)\,u^2 > 0$ pour $u \in [-1,1]$ et

$\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^0 \text{ sur } [1;1] \text{ comme quotient de fonctions continues}}$.

On a également,

$$\begin{aligned}\forall\, t \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}],\ f(\phi(t)).\phi'(t) &= \frac{2}{(1-x)+(1+x)\ \tan^2(\frac{t}{2})}.\frac{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{2} \\ &= \frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)-x(1-\tan^2\left(\frac{t}{2}\right))}.\frac{1}{\frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}} \\ &= \frac{1}{1-x\frac{1-\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}} \\ &= \frac{1}{1-x\cos(t)}\end{aligned}$$

D'après le théorème du changement de variables, $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-x\cos(t)}\,dt = \int_{-1}^{1} f(u)\,du$, d'où :

$$\boxed{\forall x \in]-1;1[,\ S(x) = \int_{-1}^{1} \frac{2}{1-x+(1+x)\,u^2}\,du}$$

Q25. f étant paire, $\forall x \in]-1;1[,\ S(x) = 2.\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{(1-x)+(1+x)\,u^2}\,du = \frac{4}{1-x}\int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1+x}{1-x}u^2}\,du$, et

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1;1[,\ S(x) = \frac{4}{1-x}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.u\right)^2}\,du &= \frac{4}{1-x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\int_0^1 \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{1+\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.u\right)^2}\,du \\ = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\left[\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}u\right)\right]_0^1 &= \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]-1;1[,\ S(x) = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)}$$

Problème 3 : optimisation du choix d'une place de parking

Problème 3, partie I : loi de X

Q26. On roule sans interruption jusqu'au numéro s avant de choisir la première place disponible (s inclus) d'où :

$$\boxed{X(\Omega) = [\![s; +\infty[\![}$$

Q27. Soit $k \geq s$. On pose pour tout $i \in \mathbb{N}$, A_i : "la i-ième place est libre."
$[X = k]$ signifie que la k-ième place est la première place libre depuis le numéro s, donc $[X = k] = \overline{A_s} \cap \overline{A_{s+1}} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$.
Sachant que les occupations de places sont indépendantes les unes des autres, que la place numéro i est libre avec une probabilité p et donc qu'elle est occupée avec une probabilité $1 - p$, on a :
$p(X = k) = p(\overline{A_s}).p(\overline{A_{s+1}}) \ldots (\overline{A_{k-1}}).p(A_k) = \underbrace{(1-p).(1-p)\ldots(1-p)}_{k-1-s+1 \text{ fois}}.p = (1-p)^{k-s}.p$

$$\boxed{X(\Omega) = [\![s; +\infty[\![\quad \text{et} \quad \forall k \geq s,\ p(X = k) = (1-p)^{k-s}.p}$$

Q28. $Y = X - s + 1$. Comme $X(\Omega) = [\![s; +\infty[\![$,

$$\boxed{Y(\Omega) = [\![1; +\infty[\![= \mathbb{N}^*}$$

De plus, $\forall k \in Y(\Omega)$, $p(Y = k) = p(X - s + 1 = k) = p(X = k + s - 1) = (1-p)^{k+s-1-s}.p$
Finalement :

$$\boxed{\forall k \in Y(\Omega),\ p(Y = k) = (1-p)^{k-1}.p}$$

$$\boxed{\text{donc } Y \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p.}$$

D'après le cours :

$$\boxed{E(Y) = \frac{1}{p} \text{ et } V(Y) = \frac{1-p}{p^2}}$$

Q29. Par linéarité de l'espérance, $E(X) = E(Y + s - 1) = E(Y) + s - 1 = \dfrac{1}{p} + s - 1$.

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{p} + s - 1}$$

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $V(aX + b) = a^2 V(X)$, d'où $V(X) = 1^2.V(Y) = V(Y)$, c'est à dire :

$$\boxed{V(X) = \frac{1-p}{p^2}}$$

Problème 3, partie II : Calcul de la distance moyenne à l'arrivée

Q30. $p = \dfrac{1}{10}$ et on suppose que D_s existe.

D'après le théorème de transfert : $D_s = E(|X-d|) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n - d| p(X = x_n) = \sum_{n=s}^{+\infty} |n-d| p(X = n)$ car $X(\Omega) = [\![s; +\infty [\![$ et pour $n \geq s$, $x_n = n$.

Or $|n-d| = \begin{cases} n-d \text{ si } n > d \\ d-n \text{ si } n \leq d \end{cases}$

D'où $D_s = \displaystyle\sum_{n=s}^{d} (d-n)\, p(X=n) + \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n-d)\, p(X=n) = S_1 + S_2$.

$$\boxed{D_s = S_1 + S_2}$$

Q31. $\forall k \geq 0,\ u_{k+1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k+1} (k+1-i) \left(\frac{9}{10}\right)^i = \underbrace{k+1}_{i=0} + \sum_{i=1}^{k+1} (k-(i-1)) \left(\frac{9}{10}\right)^i$

On effectue le changement d'indice $j = i - 1$:

$\forall k \geq 0,\ u_{k+1} = k + 1 + \displaystyle\sum_{j=0}^{k} (k-j) \left(\frac{9}{10}\right)^{j+1} = k+1+\sum_{j=0}^{k} (k-j) \left(\frac{9}{10}\right)^{j} . \left(\frac{9}{10}\right)$

$\qquad = k+1+\left(\dfrac{9}{10}\right) \displaystyle\sum_{j=0}^{k} (k-j)\left(\frac{9}{10}\right)^{j}$, et :

$$\boxed{\forall k \geq 0,\ u_{k+1} = k+1+\frac{9}{10}.u_k}$$

Q32. Soit $\mathcal{P}_k$:"$u_k = 10k - 90 + 90 \left(\dfrac{9}{10}\right)^k$".

<u>initialisation :</u> Soit $k = 0$.

$$u_0 = \sum_{i=0}^{0} (0-i) \left(\frac{9}{10}\right)^i = 0 \times 1 = 0$$

$$10 \times 0 - 90 + 90. \left(\frac{9}{10}\right)^0 = -90 + 90 = 0$$

donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

<u>hérédité :</u> Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose $\mathcal{P}_k$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

D'après la question Q31.,

$u_{k+1} = k+1+\dfrac{9}{10}.u_k = k+1+\dfrac{9}{10}.\left(10k - 90 + 90\left(\dfrac{9}{10}\right)^k\right)$ par hypothèse de récurrence.

D'où $u_{k+1} = k+1+9k-\dfrac{9}{10}.90 + 90.\left(\dfrac{9}{10}\right)^{k+1} = 10k+1-81+90.\left(\dfrac{9}{10}\right)^{k+1}$

$\qquad = 10(k+1) - 10 + 1 - 81 + 90.\left(\dfrac{9}{10}\right)^{k+1} = 10(k+1) - 90 + 90.\left(\dfrac{9}{10}\right)^{k+1}$.

donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

<u>conclusion :</u> On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = 10k - 90 + 90\left(\frac{9}{10}\right)^k}$$

Q33. $S_1 = \sum_{n=s}^{d}(d-n)\ p(X=n) = \sum_{n=s}^{d}(d-n)\ (1-p)^{n-s}.p \overset{i=n-s}{=} \sum_{i=0}^{d-s}(d-i-s)\ (1-p)^i.p$

$= p.\sum_{i=0}^{d-s}(d-s-i)\ (1-p)^i = \frac{1}{10}.\sum_{i=0}^{d-s}(d-s-i)\ \left(\frac{9}{10}\right)^i$ car $p=\frac{1}{10}$. Finalement :

$$\boxed{S_1 = \frac{1}{10}\,u_{d-s}}$$

D'après la question Q32., $S_1 = \frac{1}{10}\left(10(d-s) - 90 + 90\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}\right)$, soit encore :

$$\boxed{S_1 = d-s-9+9\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}}$$

Q34. $S_2 - S_1 = \sum_{n=d+1}^{+\infty}(n-d)\ p(X=n) - \sum_{n=s}^{d}(d-n)\ p(X=n)$

$= \sum_{n=d+1}^{+\infty}(n-d)\ p(X=n) + \sum_{n=s}^{d}(n-d)\ p(X=n) = \sum_{n=s}^{+\infty}(n-d)\ p(X=n) = E(X-d)$

d'après le théorème de transfert.

$$\boxed{S_2 - S_1 = E(X-d)}$$

Par linéarité de l'espérance, $E(X-d) = E(X) - d = \frac{1}{p} + s - 1 - d$

$= 10 + s - 1 - d = 9 + s - d$ car $p = \frac{1}{10}$.

Ainsi $S_2 = S_1 + 9 + s - d = d - s - 9 + 9\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s} + 9 + s - d = 9\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}$.

$$\boxed{S_2 = 9\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s}}$$

et $D_s = S_1+S_2 = d-s-9+18\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s} = d-s-9+18.\frac{10}{9}\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s+1} = d-s-9+20\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s+1}$.

$$\boxed{D_s = d-s-9+18\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s} = d-s-9+20\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s+1}}$$

Problème 3, partie III : Optimisation

Remarque : On admet que pour $p \in]0;1[$, $D_s = d - s + 1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}$.

Pour $p = \frac{1}{10}$, cela devient : $D_s = d - s + 1 - 10 + 20\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s+1} = d - s - 9 + 20\left(\frac{9}{10}\right)^{d-s+1}$: on retrouve le résultat de la partie précédente.

Q35. $$\begin{aligned} D_{s+1}-D_s &= d-(s+1)+1-\frac{1}{p}+\frac{2}{p}(1-p)^{d-(s+1)+1}-\left(d-s+1-\frac{1}{p}+\frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}\right) \\ &= d-s-1+1-\frac{1}{p}+\frac{2}{p}(1-p)^{d-s-1+1}-d+s-1+\frac{1}{p}-\frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1} \\ &= -1+\frac{2}{p}(1-p)^{d-s}(1-(1-p)) = -1+\frac{2}{p}(1-p)^{d-s}.p = -1+2(1-p)^{d-s} \end{aligned}$$

$$\boxed{D_{s+1}-D_s = 2(1-p)^{d-s}-1}$$

Q36. $$\begin{aligned} D_{s+1}-D_s \geq 0 &\Leftrightarrow (1-p)^{d-s} \geq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow (d-s)\ln(1-p) \geq -\ln(2) \text{ en composant par ln qui est croissante..} \\ &\Leftrightarrow d-s \leq \frac{-\ln(2)}{\ln(1-p)} \text{ car } 1-p \in]0;1[\text{, donc } \ln(1-p)<0. \\ &\Leftrightarrow s \geq d+\frac{\ln(2)}{\ln(1-p)} \\ &\Leftrightarrow s \geq \alpha \end{aligned}$$

s		α	
signe de $D_{s+1}-D_s$	$-$	0	$+$

Si on note Ent la fonction partie entière,
◇ Si $\alpha \in \mathbb{N}$, $D_{\alpha+1}-D_\alpha = 0 \Leftrightarrow D_{\alpha+1} = D_\alpha$: $D_{\alpha+1}$ est la valeur minimale de la suite et $\alpha+1$ est le plus petit entier strictement supérieur à α.
◇ Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, $D_{Ent(\alpha)+1}-D_{Ent(\alpha)} < 0 \Leftrightarrow D_{Ent(\alpha)+1} < D_{Ent(\alpha)}$
et $D_{Ent(\alpha)+2}-D_{Ent(\alpha)+1} > 0 \Leftrightarrow D_{Ent(\alpha)+2} > D_{Ent(\alpha)+1}$.
Le minimum de la suite $(D_s)_{s\in\mathbb{N}}$ est atteint pour $s = Ent(\alpha)+1$, c'est à dire le plus petit entier strictement supérieur à α.

$$\boxed{D_s \text{ est minimal lorsque } s \text{ est le plus petit entier strictement supérieur à } \alpha.}$$

Q37. $\alpha = d+\dfrac{\ln(2)}{\ln(\frac{9}{10})} = d+\dfrac{\ln(2)}{\ln(0.9)}$.

$$\begin{aligned} 2^{-1/6} < 0.9 < 2^{-1/7} &\Leftrightarrow -\frac{1}{6}\ln(2) < \ln(0.9) < -\frac{1}{7}\ln(2) \text{ car ln est croissante.} \\ &\Leftrightarrow -\frac{7}{\ln(2)} < \frac{1}{\ln(0.9)} < -\frac{6}{\ln(2)} \text{ par passage à l'inverse} \\ &\Leftrightarrow -7 < \frac{\ln(2)}{\ln(0.9)} < -6 \text{ car } \ln(2)>0 \\ &\Leftrightarrow d-7 < \alpha < d-6 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On doit commencer à chercher une place 6 numéros avant l'arrivée (à } d-6\text{) si } d\geq 6, \\ \text{et dès le numéro 0 sinon.}\end{array}}$$

Q38.
```
def Bernoulli(q) :
        return(random( ) < q)

def distance(d,s,p) :
        X=s
        while(Bernoulli(1-p)) :
                X=X+1
        return(abs(X-d))
```

remarque : "while(Bernoulli(p)==0) :" convient également

Rédigé par :
Nicolas MARTIN, TSI 2, Lycée Robert Doisneau, Corbeil-Essonnes
et
Frédérique EVRARD, TSI 2, Lycée Rouvière, Toulon.