CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES

Lundi 29 avril : 14 h - 18 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de 3 problèmes, tous indépendants.

PROBLÈME 1

Partie I - Isométrie de $\mathbb{R}^3$

Soit A la matrice définie par :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Q1. Montrer que $A \in O_3(\mathbb{R})$.

Q2. L'isométrie associée à la matrice A est-elle directe ou indirecte ?

Q3. Démontrer que $\ker(A - I_3) = Vect(\vec{u})$, où $\vec{u}$ est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$.

Q4. Soit $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, calculer $\det(\vec{j}, A\vec{j}, \vec{u})$.

Q5. Déterminer les caractéristiques de l'isométrie associée à A dans $\mathbb{R}^3$.

Partie II - Espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 2 et E l'ensemble des matrices de taille 2, réelles et symétriques.

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$, on pose $\varphi(M, M') = aa' + 2bb' + cc'$.

Q6. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que $\dim(E) = 3$.

Q7. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Q8. Soit $\mathcal{B}$ la famille définie par :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.

Partie III - Application linéaire sur E

On considère E muni du produit scalaire φ défini dans la partie **II**.

On définit l'application f sur E par : $\forall M \in E$ avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$,

$$f(M) = \begin{pmatrix} \dfrac{a+c}{2} - b & \dfrac{a-c}{2} \\ \dfrac{a-c}{2} & \dfrac{a+c}{2} + b \end{pmatrix}.$$

Q9. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Q10. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Q11. À l'aide de la partie **I**, déterminer une base $\mathcal{B}'$ de E telle que la matrice B de f dans cette base soit :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q12. Montrer que f conserve la trace et le déterminant.

PROBLÈME 2

Dans ce problème, on étudie l'intégrale $u_n = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t$ où $n \in \mathbb{N}$.

Partie I - Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q13. Calculer u_0, u_1, u_2.

Q14. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q15. Établir que $(n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}$, pour $n \geqslant 1$.

Q16. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = (n+1)u_{n+1}u_n$, pour $n \in \mathbb{N}$.
Vérifier que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et donner sa valeur.

Q17. En déduire que $(n+1)u_{n+1}^2 \leqslant 2\pi \leqslant (n+1)u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q18. Donner, à partir de la question précédente, un encadrement de u_n en fonction de n pour $n \geqslant 1$.

Q19. En déduire que $u_n \underset{\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}$.

Partie II - Série entière

Dans cette partie, on étudie la série entière de rayon de convergence R définie par :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n, \text{ pour tout } x \in]-R; R[.$$

Q20. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge-t-elle ?

Q21. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

Q22. Établir la formule suivante pour tout nombre entier naturel n et tout nombre réel $x \in]-1;1[$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)} - x^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^n(t)\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)}.$$

Q23. En déduire l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)}$ pour tout $|x| < 1$.

Q24. Montrer que $S(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2}{(1-x) + (1+x)u^2}\mathrm{d}u$ pour $|x| < 1$ à l'aide du changement de variable $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

Q25. En déduire l'expression de $S(x)$ pour $|x| < 1$.

PROBLÈME 3
Optimisation du choix d'une place de parking

Présentation générale

On considère une rue infiniment longue et rectiligne. On souhaite aller à un numéro précis de cette rue.

Devant chaque numéro se trouve une place de parking. On cherche à savoir à partir de quel moment on doit commencer à s'intéresser aux places disponibles pour pouvoir se garer au plus près de l'arrivée.

Au départ, nous sommes au début de la rue. Par convention, nous poserons que le début de la rue a pour numéro 0. Devant chaque numéro n, il y a une place de parking qui peut être libre avec une probabilité $p \in]0;1[$. On suppose que p ne dépend pas de n et que les occupations des places sont indépendantes les unes par rapport aux autres.

Notre stratégie est la suivante : on se donne s un entier naturel. On roule sans interruption jusqu'au numéro s de la rue et on choisit la première place disponible à partir du numéro s (inclus).

On note X le numéro de la place libre trouvée par cette méthode.

Partie I - Loi de X

Q26. Donner l'univers-image de $X(\Omega)$.

Q27. Déterminer la loi de X.

Q28. Soit $Y = X - s + 1$.
Montrer que Y est une loi géométrique de paramètre p dont on donnera l'espérance et la variance.

Q29. En déduire l'espérance et la variance de X.

Partie II - Calcul de la distance moyenne à l'arrivée

On souhaite aller au numéro d de cette rue avec $d \in \mathbb{N}^*$. Notre stratégie reviendra à choisir un numéro s compris entre 0 et d. Pour rappel, $s = 0$ correspond à chercher une place dès le début de la rue.

La distance à l'objectif est $|X - d|$ et l'espérance $D_s = E(|X - d|)$ est la distance moyenne à l'arrivée (on admet que D_s existe).

Pour simplifier, on prend $p = \dfrac{1}{10}$ dans cette partie.

Q30. Établir que $D_s = S_1 + S_2$ avec $S_1 = \displaystyle\sum_{n=s}^{d}(d-n)P(X=n)$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{n=d+1}^{\infty}(n-d)P(X=n)$.

Q31. Soit la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall k \geq 0, u_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k}(k-i)\left(\frac{9}{10}\right)^i$.

Montrer que $\forall k \geq 0$, $u_{k+1} = \dfrac{9}{10}u_k + k + 1$.
On pourra effectuer un changement d'indice $j = i - 1$.

Q32. Montrer, par récurrence, que pour tout $k \geq 0$, $u_k = 10k - 90 + 90\left(\dfrac{9}{10}\right)^k$.

Q33. Exprimer S_1 à l'aide de u_{d-s} puis donner l'expression de S_1 en fonction de d et s.

Q34. Justifier que $S_2 - S_1 = E(X - d)$.
En déduire la valeur de S_2 puis D_s.

Partie III - Optimisation

On admet que, pour tout $p \in]0; 1[$, $D_s = d - s + 1 - \dfrac{1}{p} + \dfrac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}$.

Q35. Simplifier $D_{s+1} - D_s$.

Q36. Étudier le signe de $D_{s+1} - D_s$.
En déduire que D_s est minimale pour s le plus petit entier strictement supérieur à α, avec $\alpha = d + \dfrac{\ln 2}{\ln(1-p)}$.

Q37. Dans cette question, on s'intéresse à l'exemple pour lequel $p = \dfrac{1}{10}$. En utilisant l'encadrement $2^{-1/6} < 0,9 < 2^{-1/7}$, à quelle distance de l'arrivée doit-on commencer à chercher une place ?

Q38. Simulation : recopier et compléter le programme en **Python** suivant pour simuler notre stratégie.

```
def Bernoulli(q):
      return (random()<q)

def distance(s,d,p):
      X = ......................
      while (.....................):
            X = ..................
      return (abs(X-d))
```

La fonction `Bernouilli` simule une variable de Bernouilli X. Elle prend comme paramètre un nombre à virgule flottante `q`. La variable `q` correspond au paramètre de la variable de Bernouilli X. Elle renvoie un booléen qui vaut `True` si $X = 1$ et `False` si $X = 0$.
La fonction `distance` simule notre stratégie. Elle prend comme paramètres des entiers `s` et `d` et un nombre à virgule flottante `p`. Ces variables correspondent aux valeurs introduites dans les sections précédentes. Elle renvoie un entier représentant la distance à parcourir en sortant de la voiture.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 19 1159 – D'après documents fournis