# I Préliminaires

**Q 1.** $\boxed{\{F_0, F_1, ..., F_{15}\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610\}}$

**Q 2.** Tout d'abord montrons par une récurrence à deux termes que $(F_n)_{n\geqslant 2}$ est suite d'entiers naturels non nuls :

- *initialisation :* $F_2 = 1 \in \mathbb{N}^*$ ; $F_3 = 2 \in \mathbb{N}^*$ ; la propriété est initialisée ;
- *hérédité :* supposons que $F_n \in \mathbb{N}^*$ et $F_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ ; on sait que $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, donc, par hypothèse de récurrence, on a $F_{n+2} \in \mathbb{N}^*$ ;
- *conclusion :* on a montré par récurrence que $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ F_n \in \mathbb{N}^*}$

Ensuite, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+2} - F_{n+1} = F_n > 0$, ce qui montre que $\boxed{\text{la suite } (F_n)_{n\geqslant 2} \text{ est strictement croissante}}$

**Q 3.** La suite $(F_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement croissante donc, soit elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, soit elle diverge vers $+\infty$.
Supposons, par l'absurde que $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n = \ell \in \mathbb{R}$ ; alors, par passage à la limite dans l'égalité
$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, il vient : $\ell = 2\ell \Leftrightarrow \ell = 0$ ; or $\forall n \geqslant 1,\ F_n > 0$ ; donc cette hypothèse est absurde.
On en conclut que $\boxed{\text{la suite } (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty}$

**Q 4.** L'équation $x^2 - x - 1 = 0$ admet comme discriminant $\Delta = 5$ et comme solutions : $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ;
Or, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = x_1$ et $\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = -x_2$ ; donc :

$$\boxed{\text{l'équation } x^2 - x - 1 = 0 \text{ admet bien comme solutions } \varphi \text{ et } -\frac{1}{\varphi}}$$

**Q 5.** D'après ce qui précède, on a $\varphi^2 - 1 = \varphi$ et $\varphi \neq 0$ ; donc $\boxed{\varphi - \dfrac{1}{\varphi} = 1}$ ; $\boxed{\varphi + \dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}}$

et $\psi = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{\frac{1}{\varphi}}{\varphi} = \dfrac{1}{\varphi^2}$ ; de plus, $\varphi^2 = \varphi + 1$ ; donc $\boxed{\psi = \dfrac{1}{\varphi^2} = \dfrac{1}{\varphi+1}}$

**Q 6.** Montrons par récurrence la propriété : $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - (-1)^n\varphi^{-n}\right)$

- *initialisation :* $F_0 = 0$ et $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^0 - (-1)^0\varphi^0\right) = 0$ ; $F_1 = 1$ et $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^1 - (-1)^1\varphi^{-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right) = 1$ ; la propriété est initialisée ;
- *hérédité :* supposons la propriété vérifiée pour $F_n$ et $F_{n+1}$ ;

$$\begin{aligned}
F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n && \text{donc, par hypothèse de récurrence,}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - (-1)^{n+1}\varphi^{-n-1} + \varphi^n - (-1)^n\varphi^{-n}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} + \varphi^n - (-1)^n(\varphi^{-n} - \varphi^{-n-1})\right) && = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n(\varphi+1) - (-1)^{n+2}\varphi^{-n-2}(\varphi^2 - \varphi)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n \times \varphi^2 - (-1)^{n+2}\varphi^{-n-2} \times 1\right) && = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+2} - (-1)^{n+2}\varphi^{-n-2}\right)
\end{aligned}$$

- *conclusion :* on a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - (-1)^n\varphi^{-n}\right)}$$

# II Séries génératrices de Fibonacci

**Q 7.** $\varphi > 1$, donc $\varphi^{-n}$ est négligeable devant $\varphi^n$ et ainsi $\boxed{F_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n}$

**Q 8.** Tout d'abord, on pose $u_n = F_n x^n$ ; ainsi $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{F_{n+1}}{F_n}|x| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\varphi^{n+1}}{\varphi^n}|x| \xrightarrow[+\infty]{} \varphi|x|$ ;

d'après le théorème de d'Alembert : $\begin{array}{ll} \text{si } \varphi|x|<1, & \text{alors la série converge absolument} \\ \text{si } \varphi|x|>1, & \text{alors la série diverge grossièrement} \end{array}$ ;

d'après le lemme d'Abel, on en déduit que $\boxed{\text{le rayon de convergence de la série } \sum_{n\geqslant 0} F_n x^n \text{ est } \dfrac{1}{\varphi}}$

Ensuite, on pose $v_n = \frac{F_n}{n!}x^n$ ; ainsi $\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \frac{F_{n+1}}{(n+1)F_n}|x| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\varphi^{n+1}}{(n+1)\varphi^n}|x| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\varphi}{n+1}|x| \xrightarrow[+\infty]{} 0 < 1$ ;
d'après le théorème de d'Alembert, la série converge pour tout $x$ réel ;

par définition, on en déduit que $\boxed{\text{le rayon de convergence de la série } \sum_{n\geqslant 0} \dfrac{F_n}{n!} x^n \text{ est } +\infty}$

**Q 9.** Soit $x \in \left]-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi}\right[$ ;

$$\begin{aligned}
(1-x-x^2)A(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^{n+2} \\
&= \sum_{n=-2}^{+\infty} F_{n+2} x^{n+2} - \sum_{n=-1}^{+\infty} F_{n+1} x^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^{n+2} \\
&= F_0 x^0 + F_1 x^1 - F_0 x^1 + \sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+2} x^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+1} x^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^{n+2} \\
&= x + \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(F_{n+2} - F_{n+1} - F_n\right)}_{=0} x^n \qquad \text{d'après la définition récurrente de } (F_n)
\end{aligned}$$

On a bien montré $\forall x \in \left]-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi}\right[$, que $\boxed{(1-x-x^2)A(x) = x}$

**Q 10.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\dfrac{1}{1-\varphi x} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\dfrac{1}{1+x/\varphi} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\dfrac{1+x/\varphi-1+\varphi x}{(1-\varphi x)(1+x/\varphi)} = \dfrac{x}{\sqrt{5}}\dfrac{\varphi+\frac{1}{\varphi}}{1+x/\varphi-\varphi x - x^2} = \dfrac{x}{\sqrt{5}}\dfrac{\varphi+\frac{1}{\varphi}}{1-x\left(\varphi-\frac{1}{\varphi}\right)-x^2}$ ;

or, on a montré que $\varphi + \dfrac{1}{\varphi} = \sqrt{5}$ et $\varphi - \dfrac{1}{\varphi} = 1$ ; donc $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{5}}\dfrac{1}{1-\varphi x} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\dfrac{1}{1+x/\varphi} = \dfrac{x}{1-x-x^2}}$

**Q 11.** On utilise le développement de référence : $\forall t \in ]-1,1[$, $\dfrac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ avec $R = +\infty$ ;

$t = \varphi x$ donne : $\boxed{\forall x \in \left]-\dfrac{1}{\varphi}, \dfrac{1}{\varphi}\right[, \qquad \dfrac{1}{1-\varphi x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^n x^n, \qquad \text{avec } R = \dfrac{1}{\varphi}}$

$t = -\dfrac{x}{\varphi}$ donne : $\boxed{\forall x \in ]-\varphi, \varphi[, \qquad \dfrac{1}{1+x/\varphi} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \varphi^{-n} x^n, \qquad \text{avec } R = \varphi}$

**Q 12.** Tout d'abord, $\varphi > 1$, donc $\frac{1}{\varphi} < \varphi$ ; soit donc $x \in \left]-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi}\right[$.

D'après **Q9.** $A(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ et, par définition $A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n$ ;

or d'après **Q10.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\dfrac{1}{1-\varphi x} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\dfrac{1}{1+x/\varphi} = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ et, d'après **Q11.**

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{1-\varphi x} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{1+x/\varphi} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \varphi^{-n} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - (-1)^n \varphi^{-n}\right) x^n$$

Par unicité du développement en série entière, on retrouve donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - (-1)^n \varphi^{-n}\right)}$

**Q 13.** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!\sqrt{5}} \left(\varphi^n - (-1)^n \varphi^{-n}\right) x^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (\varphi x)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(-x/\varphi\right)^n \right)$ ; donc

$$\boxed{B(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\mathrm{e}^{\varphi x} - \mathrm{e}^{-x/\varphi}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

**Q 14.** $B(x)\mathrm{e}^x = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \mathrm{e}^{(\varphi+1)x} - \mathrm{e}^{\left(1-\frac{1}{\varphi}\right)x} \right)$ ; or $\varphi + 1 = \varphi^2$ et $1 - \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^2}$ ; donc

$B(x)\mathrm{e}^x = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \mathrm{e}^{\varphi^2 x} - \mathrm{e}^{\varphi^{-2} x} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \varphi^{2n} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \varphi^{-2n} x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^{2n} - \varphi^{-2n}\right) x^n$ ; on a bien

$$\boxed{B(x)\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_{2n}}{n!} x^n, \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

**Q 15.** Tout d'abord dérivons le membre de gauche avec la formule de Leibniz :

$\left(B(x)\mathrm{e}^x\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(B(x)\right)^{(k)} \left(\mathrm{e}^x\right)^{(n-k)}$ ; donc $\left(B(x)\mathrm{e}^x\right)^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(B(x)\right)^{(k)}(0) \left(\mathrm{e}^x\right)^{(n-k)}(0)$

or, comme le développement en série entière coïncide en tout point avec le développement de Taylor, on a : $\left(B(x)\right)^{(k)}(0) = F_k$ ; de plus $\left(\mathrm{e}^x\right)^{(n-k)}(0) = 1$ ; on obtient donc : $\left(B(x)\mathrm{e}^x\right)^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k$.

Maintenant, d'après la formule de Taylor, dans le membre de droite la dérivée $n-$ième en zéro est donné par $F_{2n}$ ; on obtient bien

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k = F_{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

## III Représentation intégrale de la suite de Fibonacci

**Q 16.** Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto f(x)\sin(2kx)$ est $\pi-$périodique, donc , en intégrant sur une période :

$\int_0^{\pi} f(x)\sin(2kx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\sin(2kx)\,\mathrm{d}x$ et donc $\boxed{b_k = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\sin(2kx)\,\mathrm{d}x}$

or la fonction $x \mapsto f(x)\sin(2kx)$ est impaire, on en déduit donc que $\boxed{b_k = 0}$

**Q 17.** Comme précédemment, $\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x}$

**Q 18.** On pose $t = \tan(x)$ ; ce changement est bijectif et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)}$ ; on obtient donc :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{1 + 4\sin^2(x)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)} + 4\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2 + 4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + 5t^2}\,\mathrm{d}t$$

$= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{5}} \mathrm{Arctan}\left(t\sqrt{5}\right) \right]_{-\infty}^{+\infty}$ ; or $\lim_{t \to -\infty} \mathrm{Arctan}(t\sqrt{5}) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{t \to +\infty} \mathrm{Arctan}(t\sqrt{5}) = \frac{\pi}{2}$ ; on obtient

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}}$$

**Q 19.** La fonction $f$ est $\pi-$périodique, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux ; de plus $f(0) = f(\pi)$, donc $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ ; d'après le théorème de Dirichlet, on peut dire que la série de Fourier de $f$ converge en tout point vers $f$ ; soit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{+\infty} \psi^k \cos(2kx)}$$

**Q 20.** Les hypothèses étant vérifiées, l'égalité de Parseval donne $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x = a_0^2+\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2+b_k^2$ ; soit

$$\boxed{\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{1+4\sin^2(x)}\right)^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}\sum_{k=1}^{+\infty}\psi^{2k}}$$

Ensuite, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\psi^{2k}=\sum_{k=1}^{+\infty}\big(\psi^2\big)^k=\frac{1}{1-\psi^2}-1=\frac{1}{1-\frac{(-1+\sqrt{5})^2}{(1+\sqrt{5})^2}}-1=\frac{6+2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}-1=\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ ; on obtient alors :

$\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{1+4\sin^2(x)}\right)^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}\times\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\pi\sqrt{5}+3\pi-\pi\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}$ ; soit

$$\boxed{\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{1+4\sin^2(x)}\right)^2\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{5\sqrt{5}}}$$

# IV Temps d'attente de (Pile,Pile) dans un jeu de pile ou face infini

**Q 21.** $\mathbb{P}\big(Y=1\big)=\mathbb{P}\big((X_1=1)\cap(X_2=1)\big)$, or les événements sont indépendants donc :

$$\boxed{\mathbb{P}\big(Y=1\big)=\mathbb{P}\big(X_1=1\big)\times\mathbb{P}\big(X_2=1\big)=\frac{1}{4}}$$

$\mathbb{P}\big(Y=2\big)=\mathbb{P}\big((X_1=0)\cap(X_2=1)\cap(X_3=1)\big)$ ; donc, par indépendance mutuelle, il vient : $\boxed{\mathbb{P}\big(Y=2\big)=\frac{1}{8}}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=3)&=\mathbb{P}\big(((X_1=0)\cap(X_2=0)\cap(X_3=1)\cap(X_4=1)\cup((X_1=1)\cap(X_2=0)\cap(X_3=1)\cap(X_4=1))\big)\\&=\mathbb{P}\big((X_1=0)\cap(X_2=0)\cap(X_3=1)\cap(X_4=1)\big)+\mathbb{P}\big((X_1=1)\cap(X_2=0)\cap(X_3=1)\cap(X_4=1)\big)\text{ ; soit}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(Y=3\big)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(Y=4\big)&=\mathbb{P}\big((X_1=0)\cap(X_2=0)\cap(X_3=0)\cap(X_4=1)\cap(X_5=1)\big)\\&+\mathbb{P}\big((X_1=1)\cap(X_2=0)\cap(X_3=0)\cap(X_4=1)\cap(X_5=1)\big)\\&+\mathbb{P}\big((X_1=0)\cap(X_2=1)\cap(X_3=0)\cap(X_4=1)\cap(X_5=1)\big)\text{ ; soit } \boxed{\mathbb{P}\big(Y=4\big)=\frac{3}{32}}\end{aligned}$$

**Q 22.** D'après la formule des probabilités composées : $\mathbb{P}\big(Y=n+2\big)=\mathbb{P}\big(C_n\big)\times\mathbb{P}\big(X_{n+1}=0 \text{ et } X_{n+2}=X_{n+3}=1|C_n\big)$

or $\mathbb{P}\big(X_{n+1}=0 \text{ et } X_{n+2}=X_{n+3}=1|C_n\big)=\mathbb{P}\big((X_{n+1}=0)\cap(X_{n+2}=1)\cap(X_{n+3}=1)\big)=\dfrac{1}{8}$ ; donc

$$\boxed{\mathbb{P}\big(Y=n+2\big)=\frac{1}{8}\mathbb{P}\big(C_n\big)}$$

**Q 23.** L'événement $\big(X_1=1\big)\cap C_n$ signifie que le premier lancer amène Pile et qu'il n'y a pas deux Pile consécutifs dans la séquence $\big(X_1,X_2,\dots,X_n\big)$ ; il est donc nécessaire que le deuxième lancer amène Face et ainsi

$$\boxed{\big(X_1=1\big)\cap C_n=\big(X_1=1\big)\cap\big(X_2=0\big)\cap C_n}$$

**Q 24.** D'après la formule des probabilités totales : $\mathbb{P}\big(C_n\big)=\mathbb{P}\big(C_n\cap(X_1=0)\big)+\mathbb{P}\big(C_n\cap(X_1=1)\big)$ ; et d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(C_n\big)&=\mathbb{P}\big(C_n\cap(X_1=0)\big)+\mathbb{P}\big(C_n\cap(X_1=1)\cap(X_2=0)\big)\\&=\mathbb{P}\big(X_1=0\big)\times\mathbb{P}\big(C_n|(X_1=0)\big)+\mathbb{P}\big((X_1=1)\cap(X_2=0)\big)\times\mathbb{P}\big(C_n|(X_1=1)\cap(X_2=0)\big)\\&=\boxed{\frac{1}{2}\mathbb{P}\big(C_{n-1}\big)+\frac{1}{4}\mathbb{P}\big(C_{n-2}\big)}\end{aligned}$$

**Q 25.** D'après **Q 22.** $\forall n\in\mathbb{N}, \mathbb{P}\big(Y=n+2\big)=\dfrac{1}{8}\mathbb{P}\big(C_n\big)$ ;

donc $\mathbb{P}\big(C_n\big)=8\mathbb{P}\big(Y=n+2\big)$ ; $\mathbb{P}\big(C_{n-1}\big)=8\mathbb{P}\big(Y=n+1\big)$ et $\mathbb{P}\big(C_{n-2}\big)=8\mathbb{P}\big(Y=n\big)$

d'après la question précédente, on déduit la relation : $\boxed{\mathbb{P}\big(Y=n+2\big)=\dfrac{1}{2}\mathbb{P}\big(Y=n+1\big)+\dfrac{1}{4}\mathbb{P}\big(Y=n\big)}$

**Q 26.** Montrons par une récurrence à deux termes que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big(Y=n\big)=\dfrac{1}{2^{n+1}}F_n$

- *initialisation :* $\mathbb{P}\big(Y=1\big)=\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{1}{2^2}F_1=\dfrac{1}{4}$ ; $\mathbb{P}\big(Y=2\big)=\dfrac{1}{8}$ et $\dfrac{1}{2^3}F_2=\dfrac{1}{8}$ ; la propriété est initialisée ;
- *hérédité :* supposons la propriété vérifiée pour $\mathbb{P}\big(Y=n\big)$ et $\mathbb{P}\big(Y=n+1\big)$ ;

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(Y=n+2\big)&=\frac{1}{2}\mathbb{P}\big(Y=n+1\big)+\frac{1}{4}\mathbb{P}\big(Y=n\big) && \text{d'après la question précédente}\\ &=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{n+2}}F_{n+1}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2^{n+1}}F_n && \text{par hypothèse de récurrence}\\ &=\frac{1}{2^{n+3}}\big(F_{n+1}+F_n\big)=\frac{1}{2^{n+3}}F_{n+2} && \text{par définition de } F_n\end{aligned}$$

- *conclusion :* on a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big(Y=n\big)=\frac{1}{2^{n+1}}F_n}$$

**Q 27.**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(Y=0\big)&=1-\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}\big(Y=n\big)=1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}F_n\\ &=1-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}F_n\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\frac{1}{2}\left(A\left(\frac{1}{2}\right)-F_0\right) && \text{avec } F_0=0\\ &=1-\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\boxed{0} && \text{d'après la } \textbf{Q9.}\ A(x)=\frac{x}{1-x-x^2}\end{aligned}$$

**Q 28.** $\mathbb{P}\big(Y=0\big)=0$ signifie que :

$\boxed{\text{on obtiendra presque sûrement au moins une fois (Pile,Pile) dans un jeu de pile ou face infini}}$

**Q 29.** Par définition, $\mathrm{E}\big(Y\big)=\sum\limits_{n\geqslant0}n\mathbb{P}\big(Y=n\big)=\sum\limits_{n\geqslant0}\dfrac{nF_n}{2^{n+1}}$ ; étudions la convergence de cette série :

posons $u_n=\dfrac{nF_n}{2^{n+1}}$ ; alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{n+1}{n}\times\dfrac{F_{n+1}}{F_n}\times\dfrac{1}{2}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{n}{n}\times\varphi\times\dfrac{1}{2}\underset{+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{\varphi}{2}$

or $\dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}<1$ ; donc, d'après le théorème de d'Alembert, la série converge et donc

$$\boxed{Y \text{ est d'espérance finie}}$$

$\mathrm{E}(Y)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nF_n\times\dfrac{1}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nF_n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{4}A'\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$A(x)=\dfrac{x}{1-x-x^2}$ ; donc $A'(x)=\dfrac{(1-x-x^2)-x(-1-2x)}{(1-x-x^2)^2}=\dfrac{1+x^2}{(1-x-x^2)}$,

on a donc $A'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1+\frac{1}{4}}{\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^2}=20$ et finalement $\boxed{\mathrm{E}\big(Y\big)=5}$

# V Décomposition d'un entier

**Q 30.** $\boxed{100 = 3+8+89 = F_4+F_6+F_{11} \text{ est une F-décomposition convenable}}$

$100 = 1+2+8+89 = F_1$ (ou$F_2$) $+F_3+F_6+F_{11}$ n'est pas une décomposition acceptable, car $F_1$ ne peut convenir (dans l'écriture $F_k$, $k$ doit être supérieur ou égal à 2) et $F_2$ ne convient pas non plus (la condition $k_{i+1}-k_i>1$ ne serait pas vérifiée).

$100 = 3+8+34+55 = F_4+F_6+F_9+F_{10}$ n'est pas une décomposition acceptable car la condition $k_{i+1}-k_i>1$ n'est pas vérifiée.

**Q 31.** $\boxed{32 = 3+8+21 = F_4+F_6+F_8}$ ; $\boxed{272 = 5+34+233 = F_5+F_9+F_{13}}$

**Q 32.** Soit $n = F_{k_1}+F_{k_2}+\cdots+F_{k_r}$ ; démontrons par récurrence sur $r$ que $F_{k_r} \leqslant n < F_{k_r+1}$ :

- *initialisation :* si $n = F_{k_1}$, on a bien $F_{k_1} \leqslant n < F_{k_1+1}$ car la suite $(F_k)$ est strictement croissante (**Q2.**) ; la propriété est initialisée ;
- *hérédité :* supposons la propriété vraie au rang $r$ et écrivons $n = F_{k_1}+F_{k_2}+\cdots+F_{k_r}+F_{k_{r+1}}$ ;
  les nombres $(F_k)$ étant des entiers naturels non nuls, il vient aisément $F_{k_{r+1}} \leqslant n$ ;
  en notant $m = F_{k_1}+F_{k_2}+\cdots+F_{k_r}$, par hypothèse de récurrence, on a $F_{k_r} \leqslant m < F_{k_r+1}$ ; en particulier : $m < F_{k_r+1}$ ; et donc : $n < F_{k_r+1}+F_{k_{r+1}}$ ; or $F_{k_r+1} \leqslant F_{k_{r+1}-1}$ car $F_{k_r}$ et $F_{k_{r+1}}$ ne sont pas consécutifs ;
  on obtient : $n < F_{k_{r+1}-1}+F_{k_{r+1}} = F_{k_{r+1}+1}$ et la propriété est héréditaire ;
- *conclusion :* on a montré par récurrence que $\boxed{F_{k_r} \leqslant n < F_{k_r+1}}$

**Q 33.** Supposons à nouveau l'existence d'une F-décomposition pour $n$ ; on note $F_{k_r}$ le terme le plus grand de cette décomposition.

Démontrons par récurrence sur $r$ que cette décomposition est unique ;

- *initialisation :* $1 = F_2 = F_{r_1}$ donc la propriété est initialisée ;
- *hérédité :* on suppose la propriété vraie au rang $r$ ; considérons donc un entier admettant une F-décomposition comportant $r+1$ termes ; notons $F_{k_{r+1}}$ et $F_{i_{r+1}}$ deux $(r+1)$ième termes éventuellement différents ; d'après la question précédente, on a $F_{k_{r+1}} \leqslant n < F_{k_{r+1}+1}$ et $F_{i_{r+1}} \leqslant n < F_{i_{r+1}+1}$, ce qui implique nécessairement que $F_{k_{r+1}} = F_{i_{i+1}}$ ; ensuite $n - F_{k_{r+1}}$ admet une F-décomposition comportant $r$ termes, et, par hypothèse de récurrence, celle-ci est unique ;
- *conclusion :* on a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{si } n \text{ admet une F-décomposition, alors celle-ci est unique}}$$

**Q 34.** Tout d'abord, nous avons montré en **Q3.** que la suite $(F_n)$ diverge vers $+\infty$ et donc n'est pas majorée ; en particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists k \geqslant 2,\ n \leqslant F_k$.

Démontrons par récurrence sur $k \geqslant 2$, que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, vérifiant $n \leqslant F_k$, alors $n$ admet une F-décomposition :

- *initialisation :* $1 = F_2$ donc la propriété est initialisée ;
- *hérédité :* on suppose la propriété vraie au rang $k$ ; considérons donc $F_k < n < F_{k+1}$ ;
  on a donc : $0 < n - F_k < F_{k+1} - F_k$ ; or $F_{k+1} - F_k = F_{k-1}$ et comme la suite $(F_k)$ est croissante, on a $F_{k-1} < F_k$ ; on en déduit que $0 < n - F_k < F_k$ ;
  par hypothèse de récurrence, $n - F_k$ admet une F-décomposition ; et donc $n$ admet une F-décomposition ;
- *conclusion :* on a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{tout entier naturel non nul admet une F-décomposition}}$$

**Q 35.**

```
def fibonacci(k):
    L=[0,1]
    for i in range(2,k+1):
        L.append(L[i-2]+L[i-1])
    return L
```

**Q 36.**

```
def recherche(n):
    p=0
    while fibonacci(p)[-1]<=n:
        p+=1
    return p-1
```

**Q 37.**

```
def Fdecomposition(n):
    L=[]
    while n>0:
        p=recherche(n)
        f=fibonacci(p)[-1]
        L.append(f)
        n=n-f
    L.reverse()
    return L
```

**Q 38.** Liste des termes de Fibonacci inférieurs à 100 en commençant à $F_2$ : $[1,2,3,5,8,13,21,34,55,89]$ ;

donc $\boxed{\text{la liste } [0,0,1,0,1,0,0,0,0,1,1] \text{ code le nombre } 3+8+89=100}$

**Q 39.**

```
def codage(n):
    p=recherche(n)
    L1=fibonacci(p)[2:]          #liste des termes de Fibonacci en commençant à F2
    L2=[0]*len(L1)               #initialisation de la liste renvoyée
    F=Fdecomposition(n)
    for i in range(len(L1)):
        if L1[i] in F:
            L2[i]=1
    L2.append(1)                 #normalisation de la liste
    return L2
```

**Q 40.**

```
def decodage(L):
    n=0                           #initialisation de l'entier renvoyé
    L2=fibonacci(len(L))          #liste des termes de Fibonacci
    L2=L2[2:]                     #on retire F0 et F1
    for i in range(len(L)-1):     #on évite le dernier terme de L
        n+=L[i]*L2[i]
    return n
```