I Matrices compagnons

Q 1. $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & 2 \\ -1 & X & -1 \\ 0 & -1 & X-2 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3}{=} \begin{vmatrix} X-1 & X-1 & X-1 \\ -1 & X & -1 \\ 0 & -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & X & -1 \\ 0 & -1 & X-2 \end{vmatrix}$

$\underset{C2\leftarrow C2-C_1, C_3\leftarrow C_3-C_1}{=} (X-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & X+1 & -1 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1)(X+1)(X-2)$; donc le polynôme caractéristique de A est :

$$\boxed{\chi_A(X) = (X+1)(X-1)(X+2)}$$

Q 2. Le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, donc, par théorème,

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ avec } D = \operatorname{diag}\big(-1,1,2\big)}$$

Déterminons les sous-espaces propres de A et donc une base de vecteurs propres :

$$\mathrm{E}_{-1} = \operatorname{Ker}\big(A+I_3\big) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\mathrm{E}_{1} = \operatorname{Ker}\big(A-I_3\big) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\mathrm{E}_{2} = \operatorname{Ker}\big(A-2I_3\big) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

On aura donc $A = PDP^{-1} = P\operatorname{diag}\big(-1,1,2\big)\,P^{-1}$; avec $\boxed{P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

Q 3. $\chi_B(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & -1 \\ -1 & X & 3 \\ 0 & -1 & X-3 \end{vmatrix}$; un calcul similaire à **Q1.** donne $\boxed{\chi_B(X) = (X-1)^3}$

$$\mathrm{E}_{1} = \operatorname{Ker}\big(A-I_3\big) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

Q 4. Le polynôme caractéristique de B est scindé sur $\mathbb{R}$, donc $\boxed{B \text{ est trigonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$
B possède une seule valeur propre de multiplicité 3, or le sous-espace propre associé est de dimension $1 < 3$, donc $\boxed{B \text{ n'est par diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

Q 5. $Bv_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ et $v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} 1+x \\ -2+y \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $Bv_2 = v_1 + v_2 \Leftrightarrow \boxed{v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

Q 6. $Bv_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ t \end{pmatrix}$ et $v_2 + v_3 = \begin{pmatrix} -1+z \\ 1+t \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $Bv_3 = v_2 + v_3 \Leftrightarrow \boxed{v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

Q 7. Tout d'abord la famille $\big(v_1, v_2, v_3\big)$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$ car les vecteurs sont échelonnés.
Ensuite, d'après **Q3. Q5.** et **Q6.** ; $Bv_1 = v_1$, $Bv_2 = v_1 + v_2$ et $Bv_3 = v_2 + v_3$;

donc dans cette base la matrice semblable à B est $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D'après la formule de changement de base : $B = RTR^{-1}$ avec R la matrice de changement de base, soit :

$$\boxed{R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}\left(v_1, v_2, v_3\right)}$$

Q 8. Montrons par récurrence sur p que $\chi_C(X) = \chi_p(X) = X^p - a_p X^{p-1} - \cdots - a_2 X - a_1$;

- ◇ *initialisation :* $C(a_1) = \left(a_1\right)$ et $\chi_C = \chi_1 = X - a_1$; la propriété est initialisée ;
- ◇ *hérédité :* supposons la propriété vraie pour un entier p ;

$$\chi_{p+1}(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ -1 & X & 0 & \cdots & -a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & -a_p \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X - a_{p+1} \end{vmatrix} \underset{C_{p+1} \leftarrow C_p + C_{p+1}}{=} \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ -1 & X & 0 & \cdots & -a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & X - a_p \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X - a_{p+1} - 1 \end{vmatrix}$$

en développant par rapport à la dernière ligne, il vient :

$$\chi_{p+1}(X) = \underbrace{-(-1)^{2(p+1)-1}}_{=1} \underbrace{\begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & -a_1 \\ -1 & X & \cdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & X - a_p \end{vmatrix}}_{\chi_p(X)} + \left(X - a_{p+1} - 1\right) \underbrace{\begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & -1 & X \end{vmatrix}}_{\text{triangulaire}}$$

par hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned} \chi_{p+1}(X) &= X^p - a_p X^{p-1} - \cdots - a_2 X - a_1 + X^p\left(X - a_{p+1} - 1\right) \\ &= X^p - a_p X^{p-1} - \cdots - a_2 X - a_1 + X^{p+1} - a_{p+1} X^p - X^p \\ &= X^{p+1} - a_{p+1} X^p - \cdots - a_2 X - a_1 \end{aligned}$$
et la propriété est héréditaire ;

- ◇ *conclusion :* on a montré par récurrence que $\boxed{\chi_C(X) = X^p - a_p X^{p-1} - \cdots - a_2 X - a_1}$

Q 9. $$C - \lambda I_p = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots & a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & a_{p-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_p - \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \cdots & a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & a_{p-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_p - \lambda \\ -\lambda & 0 & \cdots & 0 & a_1 \end{pmatrix}$$; cette matrice possède au moins $p-1$ pivots donc est de rang au moins $p-1$; ainsi $\boxed{\mathrm{rg}\left(C - \lambda I_p\right) \geqslant p - 1}$

Un sous-espace propre de C peut être défini par $\mathrm{Ker}\left(C - \lambda I_p\right)$, où λ est une valeur propre de C.
On applique le théorème du rang à la matrice $C - \lambda I_p$: $\dim \mathbb{R}^p = \dim \mathrm{Im}\left(C - \lambda I_p\right) + \dim \mathrm{Ker}\left(C - \lambda I_p\right)$; et donc $\dim \mathrm{Ker}\left(C - \lambda I_p\right) = p - \mathrm{rg}\left(C - \lambda I_p\right)$; avec $\mathrm{rg}\left(C - \lambda I_p\right) \geqslant p - 1$; on obtient $\dim \mathrm{Ker}\left(C - \lambda I_p\right) \leqslant 1$;

or on sait que si λ est valeur propre de C alors $\dim \mathrm{Ker}\left(C - \lambda I_p\right) \geqslant 1$; on a donc $\boxed{\dim \mathrm{Ker}\left(C - \lambda I_p\right) = 1}$

Q 10.
- Si le polynôme caractéristique de C est scindé à racines simples, alors C est diagonalisable, par théorème.
- Réciproquement, supposons que C est diagonalisable ; le polynôme est scindé et la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité des valeurs propres. Or on a montré à la question précédente que chaque sous-espace propre est de dimension 1, donc chaque valeur propre est de multiplicité 1, c'est-à-dire que toutes les racines du polynôme caractéristique sont simples.

En conclusion, on a montré

$$\boxed{C \text{ est diagonalisable} \iff \text{son polynôme caractéristique est scindé à racines simples}}$$

Q 11. Soit P unitaire de degré p, il existe un unique $p-$uplet $\left(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{p-1}\right)$ tel que $P = X^p + \lambda_{p-1} X^{p-1} + \cdots + \lambda_0$
P peut s'écrire $P = X^p - (-\lambda_{p-1}) X^{p-1} - \cdots - (-\lambda_1) X - (-\lambda_0)$;

$$\boxed{P \text{ est donc le polynôme caractéristique de } C\big(-\lambda_0, -\lambda_1, \dots, -\lambda_{p-1}\big)}$$

Q 12.
- Si Q est le polynôme caractéristique d'une matrice, alors Q est unitaire.
- Réciproquement, soit Q un polynôme unitaire ; alors, d'après la question précédente, Q est le polynôme caractéristique d'une matrice C.

En conclusion, on a montré que :

$$\boxed{Q \text{ est le polynôme caractéristique d'une matrice} \iff Q \text{ est unitaire}}$$

II Matrices symétriques positives

Q 13. Considérons A et B des matrices symétriques positives, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{+*}$ et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- $\big(\lambda A + \mu B\big)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}} + \mu B^{\mathrm{T}} = \lambda A + \mu B$; donc $\lambda A + \mu B$ est symétrique.
- $X^{\mathrm{T}}\big(\lambda A + \mu B\big)X = \lambda\ X^{\mathrm{T}} A X + \mu\ X^{\mathrm{T}} B X \geqslant 0$ comme somme de termes positifs ou nuls, donc $\lambda A + \mu B$ est positive. Conclusion :

$$\boxed{\lambda A + \mu B \text{ est une matrice symétrique positive}}$$

Q 14. Tout d'abord, il est clair que si A est symétrique alors A^{T} l'est aussi.
Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; $X^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} X = X^{\mathrm{T}}\big(X^{\mathrm{T}} A\big)^{\mathrm{T}} = \big(X^{\mathrm{T}} A X\big)^{\mathrm{T}} \geqslant 0$; donc

$$\boxed{\text{si } A \text{ est symétrique positive, alors } A^{\mathrm{T}} \text{ l'est aussi}}$$

Q 15. A est symétrique réelle, donc, d'après le théorème spectral, A est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres ; c'est-à-dire qu'il exsite $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que

$$\boxed{A = P\ \mathrm{diag}\big(\lambda_1, \dots, \lambda_p\big)\ P^{\mathrm{T}}}$$

Q 16. Soit X_i un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i, alors $AX_i = \lambda_i X_i$.
On a donc : $X^{\mathrm{T}} A X_i = \lambda_i X^{\mathrm{T}} X_i$; soit $\boxed{X_i^{\mathrm{T}} A X_i = \lambda_i \|X_i\|^2}$

Q 17. Soit λ_i une valeur propre de A, alors $\lambda_i \|X_i\|^2 = X_i^{\mathrm{T}} A X_i$; or A est une matrice positive, donc $X_i^{\mathrm{T}} A X_i \geqslant 0$; de plus X_i est un vecteur propre donc n'est pas nul et par séparation $\|X_i\|^2 \neq 0$; et ainsi $\lambda_i \geqslant 0$;

$$\boxed{\text{les valeurs propres de } A \text{ sont toutes positives}}$$

Q 18. $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-a & -b \\ -b & X-c \end{vmatrix} = (X-a)(X-c) - b^2 = X^2 - (a+c)X + ac - b^2$; les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A sont les racines de χ_A, donc vérifient $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a + c \\ \lambda_1 \lambda_2 = ac - b^2 \end{cases}$; à la question précédente, on a montré que les valeurs propres de A sont positives ; donc $\boxed{a + c \geqslant 0 \text{ et } ac - b^2 \geqslant 0}$

Q 19. Soit A une matrice symétrique.
$X^{\mathrm{T}} A X = X^{\mathrm{T}}\ P\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) P^{\mathrm{T}}\ X = \big(P^{\mathrm{T}} X\big)^{\mathrm{T}}\ \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)\ P^{\mathrm{T}} X = X'^{\mathrm{T}}\ \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)\ X'$

de plus $X'^{\mathrm{T}}\ \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)\ X' = \begin{pmatrix} x'_1 & \cdots & x'_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & \cdots & x'_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 x'_1 \\ \vdots \\ \lambda_p x'_p \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i'^2$

$$\boxed{X^{\mathrm{T}} A X = X'^{\mathrm{T}}\ \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)\ X' = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i'^2}$$

Q 20. $X^{\mathrm{T}} A X = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i'^2$; or les valeurs propres de A sont positives ; donc $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i'^2 \geqslant 0$ comme somme de termes positifs, et, ainsi $X^{\mathrm{T}} A X \geqslant 0$ ce qui signifie que $\boxed{A \text{ est une matrice symétrique positive}}$

Q 21.
- D'après **Q17.** si A est symétrique positive, alors les valeurs propres sont positives.
- D'après **Q20.** si A et symétrique et que ses valeurs propres sont positives, alors A est symétrique positive.

Conclusion : pour une matrice A symétrique ;

$$\boxed{A \text{ est symétrique positive} \iff \text{ses valeurs propres sont positives}}$$

Q 22. On suppose que $A = B^{\mathrm{T}} B$.
- $A^{\mathrm{T}} = \left(B^{\mathrm{T}} B\right)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \left(B^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} B = A$ et donc A est symétrique.
- Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $X^{\mathrm{T}} A X = X^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} B X = \left(BX\right)^{\mathrm{T}} BX = \|BX\|^2 \geqslant 0$ et donc A est positive.

Conclusion : $\boxed{\text{s'il existe } B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \text{ telle que } A = B^{\mathrm{T}} B, \text{ alors } A \text{ est symétrique positive}}$

Q 23. Soit A une matrice symétrique positive, alors il existe des réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ tels que

$$\begin{aligned} A &= P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)\ P^{\mathrm{T}} = P \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_p}\right) \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_p}\right)\ P^{\mathrm{T}} \\ &= \left(\operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_p}\right) P^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_p}\right) P^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} B \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{donc il existe } B = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_p}\right) P^{\mathrm{T}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } A = B^{\mathrm{T}} B}$$

III Produits de Kronecker

Q 24. $\boxed{A \otimes B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \\ -2 & 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{X \otimes Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}$

Q 25. $A \otimes B$ est une matrice symétrique réelle donc $\boxed{A \otimes B \text{ est diagonalisable}}$

Q 26. $AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $BY = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et

$$\left(A \otimes B\right)\left(X \otimes Y\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \\ -2 & 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ -20 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{donc}$$

$$\boxed{X,\ Y \text{ et } X \otimes Y \text{ sont vecteurs propres respectifs de } A,\ B \text{ et } A \otimes B \text{ associés aux valeurs propres } 5,\ 2 \text{ et } 10}$$

Q 27. Effectuons les calculs par blocs en ne détaillant que pour un bloc :

$$\begin{aligned} \left(\alpha A + A'\right) \otimes B &= \begin{pmatrix} \alpha a_{11} + a'_{11} & \alpha a_{12} + a'_{12} \\ \alpha a_{21} + a'_{21} & \alpha a_{22} + a'_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} (\alpha a_{11} + a'_{11})x & (\alpha a_{11} + a'_{11})y \\ (\alpha a_{11} + a'_{11})z & (\alpha a_{11} + a'_{11})t \end{matrix} & \cdots \\ \hline \cdots & \cdots \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \alpha a_{11} x + a'_{11} x & \alpha a_{11} y + a'_{11} y \\ \alpha a_{11} z + a'_{11} z & \alpha a_{11} t + a'_{11} t \end{matrix} & \cdots \\ \hline \cdots & \cdots \end{array}\right) \\ &= \alpha \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} a_{11} x & a_{11} y \\ a_{11} z & a_{11} t \end{matrix} & \cdots \\ \hline \cdots & \cdots \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} a'_{11} x & a'_{11} y \\ a'_{11} z & a'_{11} t \end{matrix} & \cdots \\ \hline \cdots & \cdots \end{array}\right) \quad ; \text{donc on a bien :} \end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\alpha A + A'\right) \otimes B = \alpha A \otimes B + A' \otimes B}$$

Q 28.
- $\left(A\otimes B\right)^{\mathrm{T}} = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11}\alpha & a_{11}\gamma & a_{21}\alpha & a_{21}\gamma \\ a_{11}\beta & a_{11}\delta & a_{21}\beta & a_{21}\delta \\ a_{12}\alpha & a_{12}\gamma & a_{22}\alpha & a_{22}\gamma \\ a_{12}\beta & a_{12}\delta & a_{22}\beta & a_{22}\delta \end{pmatrix}$
- $A^{\mathrm{T}}\otimes B^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\alpha & \gamma \\ \beta & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\alpha & a_{11}\gamma & a_{21}\alpha & a_{21}\gamma \\ a_{11}\beta & a_{11}\delta & a_{21}\beta & a_{21}\delta \\ a_{12}\alpha & a_{12}\gamma & a_{22}\alpha & a_{22}\gamma \\ a_{12}\beta & a_{12}\delta & a_{22}\beta & a_{22}\delta \end{pmatrix}$; donc on a bien :

$$\boxed{\left(A\otimes B\right)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}\otimes B^{\mathrm{T}}}$$

Si A et B sont symétriques, alors $A^{\mathrm{T}} = A$ et $B^{\mathrm{T}} = B$, donc $A^{\mathrm{T}}\otimes B^{\mathrm{T}} = A\otimes B$; or $A^{\mathrm{T}}\otimes B^{\mathrm{T}} = \left(A\otimes B\right)^{\mathrm{T}}$; donc $\left(A\otimes B\right)^{\mathrm{T}} = A\otimes B$ et $\boxed{A\otimes B \text{ est symétrique}}$

Q 29.
- $\mathrm{tr}(A\otimes B) = a_{11}\alpha + a_{11}\delta + a_{22}\alpha + a_{22}\delta$
- $\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) = \left(a_{11}+a_{22}\right)\left(\alpha+\delta\right) = a_{11}\alpha + a_{11}\delta + a_{22}\alpha + a_{22}\delta$

; donc : $\boxed{\mathrm{tr}(A\otimes B) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)}$

Q 30. Soient X et Y vecteurs propres respectifs de A et B associés aux valeurs propres respectives λ et μ.
Tout d'abord, comme X et Y ne sont pas nuls, $X\otimes Y$ n'est pas le vecteur nul.
Ensuite, $\left(A\otimes B\right)\left(X\otimes Y\right) \underset{\text{d'après III.3}}{=} \left(AX\right)\otimes\left(BY\right) \underset{\text{par définition}}{=} \left(\lambda X\right)\otimes\left(\mu Y\right) = \lambda\mu\, X\otimes Y$; et donc

$$\boxed{X\otimes Y \text{ est vecteur propre de } A\otimes B \text{ associé à la valeur propre } \lambda\mu}$$

Q 31. Soient A et B deux matrices symétriques positives.
D'après **Q23.** il existe des matrices E et F de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = E^{\mathrm{T}}E$ et $B = F^{\mathrm{T}}F$.
Alors, $A\otimes B = \left(E^{\mathrm{T}}E\right)\otimes\left(F^{\mathrm{T}}F\right) \underset{\text{d'après III.3}}{=} \left(E^{\mathrm{T}}\otimes F^{\mathrm{T}}\right)\left(E\otimes F\right) \underset{\text{d'après } \mathbf{Q29.}}{=} \left(E\otimes F\right)^{\mathrm{T}}\left(E\otimes F\right)$

Il existe donc $G = E\otimes F \in \mathscr{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ telle que $A\otimes B = G^{\mathrm{T}}G$; d'après **Q22.** : $\boxed{A\otimes B \text{ est symétrique positive}}$

Q 32. Détaillons le premier calcul : $E^{(2)}_{1,2}\otimes E^{(2)}_{2,1} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) = E^{(4)}_{2,3}$

Des calculs similaires permettent de remplir le tableau des produits $A\otimes B$ suivant :

A \ B	$E^{(2)}_{1,1}$	$E^{(2)}_{1,2}$	$E^{(2)}_{2,1}$	$E^{(2)}_{2,2}$
$E^{(2)}_{1,1}$	$E^{(4)}_{1,1}$	$E^{(4)}_{1,2}$	$E^{(4)}_{2,1}$	$E^{(4)}_{2,2}$
$E^{(2)}_{1,2}$	$E^{(4)}_{1,3}$	$E^{(4)}_{1,4}$	$E^{(4)}_{2,3}$	$E^{(4)}_{2,4}$
$E^{(2)}_{2,1}$	$E^{(4)}_{3,1}$	$E^{(4)}_{3,2}$	$E^{(4)}_{4,1}$	$E^{(4)}_{4,2}$
$E^{(2)}_{2,2}$	$E^{(4)}_{3,3}$	$E^{(4)}_{3,4}$	$E^{(4)}_{4,3}$	$E^{(4)}_{4,4}$

Q 33. Raisonnons par blocs : la matrice $E^{(n)}_{i,j}\otimes E^{(n)}_{k,l}$ est une matrice constituée de n^2 blocs tous nuls sauf celui de coordonnées (i,j) qui contient $E^{(n)}_{k,l}$; on a donc

$$\boxed{E^{(n)}_{i,j}\otimes E^{(n)}_{k,l} = E^{(n^2)}_{n(i-1)+k,\,n(j-1)+l}}$$

Q 34. Soient A et B des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, ; on pose : $A = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}\lambda_{i,j}E^{(2)}_{i,j}$ et $B = \sum\limits_{1\leqslant k,l\leqslant n}\mu_{k,l}E^{(2)}_{k,l}$.

Alors : $A\otimes B = \left(\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}\lambda_{i,j}E^{(2)}_{i,j}\right)\otimes\left(\sum\limits_{1\leqslant k,l\leqslant n}\mu_{k,l}E^{(2)}_{k,l}\right) = \sum\limits_{1\leqslant i,j,k,l\leqslant n}\lambda_{i,j}\mu_{k,l}E^{(2)}_{i,j}\otimes E^{(2)}_{k,l}$

τ_2 est linéaire, donc $\tau_2\big(A\otimes B\big) = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j,k,l\leqslant n} \lambda_{i,j}\mu_{k,l}\tau_2\big(E^{(2)}_{i,j}\otimes E^{(2)}_{k,l}\big) = \sum_{1\leqslant i,j,k,l\leqslant n} \lambda_{i,j}\mu_{k,l}E^{(2)}_{i,j}\otimes\big(E^{(2)}_{k,l}\big)^{\mathrm{T}}$

D'autre part $A\otimes B^{\mathrm{T}} = \left(\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\lambda_{i,j}E^{(2)}_{i,j}\right)\otimes\left(\sum_{1\leqslant k,l\leqslant n}\mu_{k,l}E^{(2)}_{k,l}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\lambda_{i,j}E^{(2)}_{i,j}\right)\otimes\left(\sum_{1\leqslant k,l\leqslant n}\mu_{k,l}\big(E^{(2)}_{k,l}\big)^{\mathrm{T}}\right)$

soit : $A\otimes B^{\mathrm{T}} = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j,k,l\leqslant n}\lambda_{i,j}\mu_{k,l}E^{(2)}_{i,j}\otimes\big(E^{(2)}_{k,l}\big)^{\mathrm{T}}$; on bien : $\boxed{\tau_2\big(A\otimes B\big) = A\otimes B^{\mathrm{T}}}$

Q 35. Soit $\alpha\in\mathbb{Z}$; alors α est racine de $X-\alpha$, qui est un polynôme unitaire à cœfficients dans $\mathbb{Z}$. Donc :

$$\boxed{\alpha\in\mathbb{Z}\text{ est un entier algébrique}}$$

Q 36. Les nombres i et $\sqrt{2}$ sont racines respectives de X^2+1 et X^2-2, deux polynômes unitaires à cœfficients entiers ; donc :

$$\boxed{i\text{ et }\sqrt{2}\text{ sont des entiers algébriques}}$$

Q 37. Le nombre d'or $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est racine de X^2-X-1 et donc

$$\boxed{\varphi\text{ est un entier algébrique}}$$

Q 38. Soient α et β deux entiers algébriques, alors, par définition, il existe deux polynômes unitaires à cœfficients dans $\mathbb{Z}$, P et Q tels que $P(\alpha) = Q(\beta) = 0$.

P et Q étant unitaires, d'après **Q11** et **Q12.** ils peuvent être considérés comme polynômes caractéristiques de deux matrices compagnons A et B à cœfficients entiers. Ainsi, α est une valeur propre de A et β est une valeur propre de B.

D'après **Q30.** on en déduit que $\alpha\beta$ est valeur propre de $A\otimes B$, matrice à cœfficients entiers ; et donc $\alpha\beta$ est racine du polynôme caractéristique de $A\otimes B$.

D'après **Q12.** on déduit que ce polynôme est unitaire et, d'après le résultat admis dans l'énoncé, on déduit que ce polynôme est à cœfficients entiers ; donc :

$$\boxed{\alpha\beta\text{ est entier algébrique}}$$

IV Etats quantiques de Werner

Q 39. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{Q}_n$, c'est-à-dire symétriques positives et de trace égale à 1, $t\in[0,1]$ et $X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- $\big(tA+(1-t)B\big)^{\mathrm{T}} = tA^{\mathrm{T}}+(1-t)B^{\mathrm{T}} = tA+(1-t)B$; donc $tA+(1-t)B$ est symétrique.
- $X^{\mathrm{T}}\big(tA+(1-t)B\big)X = tX^{\mathrm{T}}AX+(1-t)X^{\mathrm{T}}BX\geqslant 0$ comme somme de termes positifs ; donc $tA+(1-t)B$ est positive.
- $\mathrm{tr}\big(tA+(1-t)B\big) = t\mathrm{tr}(A)+(1-t)\mathrm{tr}(B) = t+1-t = 1$. Donc :

$$\boxed{tA+(1-t)B\in\mathscr{Q}_n}$$

Q 40.
- Pour tout $i\in[\![1,m]\!]$, $A_i\in\mathscr{Q}_n$ et $B_i\in\mathscr{Q}_n$, donc A_i et B_i sont symétriques positives et, d'après **Q31.** $A_i\otimes B_i$ est symétrique positive. On en déduit d'après **Q13.** que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}p_iA_i\otimes B_i$ est symétrique positive.
- $\mathrm{tr}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m}p_iA_i\otimes B_i\right) \underset{\text{linéarité de la trace}}{=} \sum_{i=1}^{m}p_i\mathrm{tr}\big(A_i\otimes B_i\big) \underset{\text{d'après }\textbf{Q29}}{=} \sum_{i=1}^{m}p_i\underbrace{\mathrm{tr}(A_i)}_{=1}\underbrace{\mathrm{tr}(B_i)}_{=1} = \sum_{i=1}^{m}p_i = 1$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m}p_iA_i\otimes B_i\in\mathscr{Q}_{n^2}}$$

Q 41. $\tau_2(C) = \tau_2\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m}p_iA_i\otimes B_i\right) \underset{\text{par linéarité}}{=} \sum_{i=1}^{m}p_i\tau_2\left(A_i\otimes B_i\right) \underset{\text{d'après }\textbf{Q34.}}{=} \sum_{i=1}^{m}p_iA_i\otimes B_i^{\mathrm{T}}$;

or $\forall i \in [\![1,m]\!]$, A_i et B_i sont symétriques positives, donc, d'après **Q14.** B_i^{T} l'est aussi, et par suite $A_i \otimes B_i^{\mathrm{T}}$ également. Donc :

$$\boxed{\tau_2(C) \text{ est symétrique positive.}}$$

Q 42. Tout d'abord $\Psi^{\mathrm{T}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(E_{1,i}^{(1,n)} \otimes E_{1,i}^{(1,n)}\right)^{\mathrm{T}} \underset{\text{d'après } \mathbf{Q28.}}{=} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left(E_{1,i}^{(1,n)}\right)^{\mathrm{T}} \otimes \left(E_{1,i}^{(1,n)}\right)^{\mathrm{T}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} E_{i,1}^{(n,1)} \otimes E_{i,1}^{(n,1)}$

$$\Psi^{\mathrm{T}}\Psi = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} E_{i,1}^{(n,1)} \otimes E_{i,1}^{(n,1)}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} E_{1,j}^{(1,n)} \otimes E_{1,j}^{(1,n)}\right) = \frac{1}{n}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(E_{i,1}^{(n,1)} \otimes E_{i,1}^{(n,1)}\right)\left(E_{1,j}^{(1,n)} \otimes E_{1,j}^{(1,n)}\right)$$
$$\underset{\text{d'après } \mathbf{Q29.}}{=} \frac{1}{n}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(E_{i,1}^{(n,1)}E_{1,j}^{(1,n)}\right) \otimes \left(E_{i,1}^{(n,1)}E_{1,j}^{(1,n)}\right) = \frac{1}{n}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} E_{i,j}^{(n)} \otimes E_{i,j}^{(n)}$$
$$\underset{\text{d'après } \mathbf{Q33.}}{=} \boxed{\frac{1}{n}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} E_{n(i-1)+i,n(j-1)+j}^{(n^2)}}$$

Q 43.
- Tout d'abord, d'après **Q22.**, on en déduit que $\Psi^{\mathrm{T}}\Psi$ est symétrique positive.
- $\mathrm{tr}\left(\Psi^{\mathrm{T}}\Psi\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \mathrm{tr}\left(E_{n(i-1)+i,n(j-1)+j}^{(n^2)}\right)$; or $\mathrm{tr}\left(E_{k,l}^{(n^2)}\right) = 0$ si $k \neq l$ et $\mathrm{tr}\left(E_{k,k}^{(n^2)}\right) = 1$; dans la somme, il y a donc n termes non nuls, et ainsi $\mathrm{tr}\left(\Psi^{\mathrm{T}}\Psi\right) = 1$.

$$\boxed{\Psi^{\mathrm{T}}\Psi \text{ est un état quantique de } \mathscr{M}_{n^2}(\mathbb{R})}$$

Q 44. D'après **Q42.** si $n = 2$, alors $\Psi^{\mathrm{T}}\Psi = \dfrac{1}{2}\left(E_{1,1}^{(4)} + E_{1,4}^{(4)} + E_{4,1}^{(4)} + E_{4,4}^{(4)}\right) = \boxed{\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Q 45. Soit $p \in [0,1]$; $\Psi^{\mathrm{T}}\Psi \in \mathscr{Q}_4$ et $\dfrac{1}{4}I_4 \in \mathscr{Q}_4$, de plus $\mathscr{Q}_4$ est convexe, donc : $\boxed{W_p = p\Psi^{\mathrm{T}}\Psi + (1-p)\dfrac{1}{4}I_4 \in \mathscr{Q}_4}$

Q 46. $W_p = \dfrac{p}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \dfrac{1-p}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1+p}{4} & 0 & 0 & \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{1-p}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-p}{4} & 0 \\ \frac{p}{2} & 0 & 0 & \frac{1+p}{4} \end{pmatrix}}$

Q 47. $W_p = \dfrac{1+p}{4}\left(E_{1,1}^{(4)} + E_{4,4}^{(4)}\right) + \dfrac{1+p}{2}\left(E_{2,2}^{(4)} + E_{3,3}^{(4)}\right) + \dfrac{p}{2}\left(E_{4,1}^{(4)} + E_{1,4}^{(4)}\right)$

$$\underset{\text{d'après } \mathbf{Q32.}}{=} \frac{1+p}{4}\left(E_{1,1}^{(2)} \otimes E_{1,1}^{(2)} + E_{2,2}^{(2)} \otimes E_{2,2}^{(2)}\right) + \frac{1+p}{2}\left(E_{1,1}^{(2)} \otimes E_{2,2}^{(2)} + E_{2,2}^{(2)} \otimes E_{1,1}^{(2)}\right) + \frac{p}{2}\left(E_{2,1}^{(2)} \otimes E_{2,1}^{(2)} + E_{1,2}^{(2)} \otimes E_{1,2}^{(2)}\right)$$

$$\tau_2\left(W_p\right) = \frac{1+p}{4}\left(E_{1,1}^{(2)} \otimes \left(E_{1,1}^{(2)}\right)^{\mathrm{T}} + E_{2,2}^{(2)} \otimes \left(E_{2,2}^{(2)}\right)^{\mathrm{T}}\right) + \frac{1+p}{2}\left(E_{1,1}^{(2)} \otimes \left(E_{2,2}^{(2)}\right)^{\mathrm{T}} + E_{2,2}^{(2)} \otimes \left(E_{1,1}^{(2)}\right)^{\mathrm{T}}\right) + \frac{p}{2}\left(E_{2,1}^{(2)} \otimes \left(E_{2,1}^{(2)}\right)^{\mathrm{T}} + E_{1,2}^{(2)} \otimes \left(E_{1,2}^{(2)}\right)^{\mathrm{T}}\right)$$
$$= \frac{1+p}{4}\left(E_{1,1}^{(2)} \otimes E_{1,1}^{(2)} + E_{2,2}^{(2)} \otimes E_{2,2}^{(2)}\right) + \frac{1+p}{2}\left(E_{1,1}^{(2)} \otimes E_{2,2}^{(2)} + E_{2,2}^{(2)} \otimes E_{1,1}^{(2)}\right) + \frac{p}{2}\left(E_{2,1}^{(2)} \otimes E_{1,2}^{(2)} + E_{1,2}^{(2)} \otimes E_{2,1}^{(2)}\right)$$
$$= \frac{1+p}{4}\left(E_{1,1}^{(4)} + E_{4,4}^{(4)}\right) + \frac{1+p}{2}\left(E_{2,2}^{(4)} + E_{3,3}^{(4)}\right) + \frac{p}{2}\left(E_{3,2}^{(4)} + E_{2,3}^{(4)}\right) \quad \text{; soit :}$$

$$\boxed{\tau_2\left(W_p\right) = \begin{pmatrix} \frac{1+p}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-p}{4} & \frac{p}{2} & 0 \\ 0 & \frac{p}{2} & \frac{1-p}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+p}{4} \end{pmatrix}}$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$\chi(X) = \begin{vmatrix} X-\frac{1+p}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X-\frac{1-p}{4} & -\frac{p}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{p}{2} & X-\frac{1-p}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X-\frac{1+p}{4} \end{vmatrix} = \left(X-\frac{p+1}{4}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & X-\frac{1-p}{4} & -\frac{p}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{p}{2} & X-\frac{1-p}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X-\frac{1+p}{4} \end{vmatrix}$$

$$= \left(X-\frac{p+1}{4}\right)\begin{vmatrix} X-\frac{1-p}{4} & -\frac{p}{2} & 0 \\ -\frac{p}{2} & X-\frac{1-p}{4} & 0 \\ 0 & 0 & X-\frac{1+p}{4} \end{vmatrix} = \left(X-\frac{p+1}{4}\right)^2 \begin{vmatrix} X-\frac{1-p}{4} & -\frac{p}{2} \\ -\frac{p}{2} & X-\frac{1-p}{4} \end{vmatrix}$$

$$= \left(X-\frac{p+1}{4}\right)^2 \left(\left(X-\frac{1-p}{4}\right)^2-\frac{p^2}{4}\right) = \left(X-\frac{p+1}{4}\right)^2 \left(X-\frac{1-p}{4}-\frac{p}{2}\right)\left(X-\frac{1-p}{4}+\frac{p}{2}\right)$$

$$= \left(X-\frac{p+1}{4}\right)^3 \left(X-\frac{1-3p}{4}\right)$$

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } \tau_2(W_p) \text{ sont donc : } \frac{1+p}{4} \text{ et } \frac{1-3p}{4}}$$

Q 48. Tout d'abord on constate que $\tau_2(W_p)$ est une matrice symétrique.

Ensuite, d'après **Q21.** une matrice est symétrique positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives. Or si $p \in \left]\frac{1}{3}, 1\right]$, alors la valeur propre $\frac{1-3p}{4}$ est négative.

Ainsi $\forall p \in \left]\frac{1}{3}, 1\right] \subset [0,1]$, la matrice $\tau_2(W_p)$ n'est pas symétrique positive.

En utilisant la contraposée de la proposition démontrée à la question **Q41.**, il vient :

$$\boxed{\forall p \in \left]\tfrac{1}{3}, 1\right] \subset [0,1], \text{ l'état quantique } W_p \text{ n'est pas séparable}}$$