# E.P.I.T.A. 2019

**Epreuve de mathématiques PT - TSI (3h)**

---

Dans ce problème, on se propose d'étudier la fonction $S$ de la variable réelle $x$ définie (sous réserve de convergence) comme somme de la série suivante :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\,n^2} = 1 + e^{-x} + e^{-4x} + e^{-9x} + e^{-16x} + \ldots .$$

On étudie dans la partie I le domaine de définition et les principales propriétés de la fonction $S$. On en détermine en particulier des équivalents aux bornes de son intervalle de définition en exploitant une intégrale dont on étudie la convergence et la valeur dans la partie II.

## ■ PARTIE I : Etude de la fonction *S*

On exploite ici la série entière de la variable réelle $t$ définie sous réserve de convergence par :

$$F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n^2} = 1 + t + t^4 + t^9 + t^{16} + \ldots .$$

1°) *Etude du domaine de définition des fonctions F et S*

a) Examiner pour $|t| \geq 1$ la nature de la série $\sum t^{n^2}$.

b) Pour tout réel $t$ de $]-1, 1[$ et tout entier naturel $n$, justifier l'inégalité : $|t|^{n^2} \leq |t|^n$.
Etudier la convergence et expliciter la somme de la série $\sum |t|^n$ pour $n \geq 0$ et $|t| < 1$.
En déduire la nature des séries $\sum |t|^{n^2}$ et $\sum t^{n^2}$ pour $|t| < 1$.

c) Préciser le domaine de définition de la fonction $F$.

d) Déduire de ces résultats que la série $\sum e^{-x\,n^2}$ converge si et seulement si $x > 0$,
puis exprimer alors sa somme $S(x)$ en fonction de $F(e^{-x})$.

2°) *Premières propriétés des fonctions F et S*

a) Justifier que la fonction $F$ est de classe $C^\infty$ sur $]-1, 1[$.

b) Déterminer le sens de variation de $F$ sur $[0, 1[$.
En déduire que la fonction $F$ admet une limite finie ou infinie en 1.

c) En exploitant l'inégalité $F(t) \geq \sum_{n=0}^{N} t^{n^2}$ pour tout entier naturel $N$ et pour tout réel $t$ de $[0, 1[$,
établir, pour tout entier naturel $N$, que $\lim_{t \to 1} F(t) \geq N + 1$.
Quelle est la limite de $F(t)$ lorsque $t$ tend vers 1?

d) Déduire des résultats précédents que la fonction $S$ est de classe $C^\infty$ sur $]0, +\infty[$, et donner son sens de variation et les limites de $S(x)$ quand $x$ tend vers 0 et quand $x$ tend vers $+\infty$.

3°) *Recherche d'un équivalent de* $S(x)-1$ *quand x tend vers* $+\infty$

a) Pour tout réel $x>0$, établir que :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\,n^2} \;\le\; \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\,n}.$$

b) En explicitant cette dernière somme, démontrer que $S(x)-1-e^{-x}=o(e^{-x})$ en $+\infty$.
En déduire un équivalent de $S(x)-1$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

4°) *Recherche d'un équivalent de* $S(x)$ *quand x tend vers 0*

a) Etablir l'inégalité suivante pour tout entier naturel $n$ et tout réel $x>0$ :

$$e^{-x\,(n+1)^2} \;\le\; \int_n^{n+1} e^{-x\,t^2}\,\mathrm{d}t \;\le\; e^{-x\,n^2}.$$

b) En déduire l'inégalité suivante pour $x>0$ :

$$S(x)-1 \;\le\; \int_0^{+\infty} e^{-x\,t^2}\,\mathrm{d}t \;\le\; S(x).$$

c) En exploitant l'égalité $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, calculer l'intégrale ci-dessus en posant $u=t\sqrt{x}$.
Retrouver alors $\lim_{x\to 0} S(x)$, puis donner un équivalent de $S(x)$ quand $x$ tend vers 0.

5°) *Recherche d'une valeur approchée de* $S(x)$

a) En raisonnant comme à la question 4.a), établir pour tout entier naturel $N$ et tout réel $x>0$ :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-x\,n^2} \;\le\; \int_N^{+\infty} e^{-x\,t^2}\,\mathrm{d}t.$$

b) A l'aide d'un changement de variable dans cette dernière intégrale, en déduire que :

$$\forall\, N\in\mathbb{N}^*,\quad S(x)-\sum_{n=0}^{N} e^{-x\,n^2} \;\le\; \frac{1}{2\sqrt{x}}\int_{x\,N^2}^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \;\le\; \frac{e^{-x\,N^2}}{2\,N\,x}.$$

c) En déduire un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée de $S(x)$ à $\varepsilon>0$ près.

d) Préciser une valeur approchée de $S(1)$ à $10^{-7}$ près.

## ■ PARTIE II : Calcul de l'intégrale de Gauss

On se propose ici de justifier l'existence et de calculer l'intégrale de Gauss, qu'on a exploitée précédemment à la question 4, et qui est définie par :

$$I=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

6°) *Convergence de l'intégrale de Gauss I*

a) Pour tout réel $t\ge 1$, établir l'inégalité suivante : $e^{-t^2}\le e^{-t}$.

b) Justifier l'existence et préciser la valeur de l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

c) En déduire l'existence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, puis de l'intégrale de Gauss $I$.

7°) *Etude des intégrales de Wallis*

Pour tout entier naturel $n$, on définit l'intégrale de Wallis $W_n$ par :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Calculer les intégrales $W_0$ et $W_1$.

b) A l'aide d'une intégration par parties du produit $\cos^{n+1}(t) = \cos(t)\cos^n(t)$, établir que :

$$\forall\, n \geq 1, \quad W_{n+1} = n\,(W_{n-1} - W_{n+1}).$$

Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer $W_{n+1}$ en fonction de $W_{n-1}$, puis justifier l'égalité suivante :

$$\forall\, n \geq 1, \quad (n+1)\,W_{n+1}\,W_n = n\,W_n\,W_{n-1}.$$

En déduire qu'on a pour tout entier $n \geq 1$ : $n\,W_n\,W_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

c) Pour tout entier $n \geq 1$, établir l'inégalité $W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$.

En déduire l'équivalence $W_{n-1} \sim W_n$.

d) Déduire des résultats précédents l'équivalence : $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\,n}}$ .

8°) *Calcul de l'intégrale de Gauss I*

a) Pour tout réel $x > -1$, établir l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$.

En déduire, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $t$ de $\left[0, \sqrt{n}\right[$, les inégalités suivantes :

$$\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq -\frac{t^2}{n} \qquad \text{et} \qquad \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \leq \frac{t^2}{n}.$$

b) A l'aide de ces inégalités, établir la double inégalité suivante pour $n \geq 1$ :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t.$$

c) En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{n}\,\sin(u)$ dans la première de ces intégrales, et $t = \sqrt{n}\,\tan(u)$ dans la dernière de celles-ci, établir qu'on a pour tout entier $n \geq 1$ :

$$\sqrt{n}\;W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leq \sqrt{n}\;W_{2n-2}.$$

d) A l'aide de l'équivalent de $W_n$ obtenu au 7°, déterminer la valeur de l'intégrale de Gauss *I*.