$\boxed{\textsf{Devoir surveillé 03}}$

2TSI. Mathématiques

Samedi 14 décembre 2019

Les exercices et le problème sont indépendants. Durée 4 heures

Exercice 01

On considère trois urnes : U_1 qui contient initialement 4 boules noires et 2 boules blanches, U_2 qui contient initialement 5 boules noires et 5 boules blanches, U_3 qui contient initialement 3 boules noires et 4 boules blanches. On commence par tirer une boule de U_1, on note sa couleur on met cette boule dans U_2 puis on tire une boule de U_2, on note sa couleur et on met cette boule dans U_3. Enfin, on tire une boule de U_3 et on note sa couleur. Calculer la probabilité que les trois boules tirées soient de la même couleur.

Indication : *on notera B_i (respectivement N_i) : ≪ la boule tirée dans l'urne U_i est blanche (respectivement noire) ≫ et U : ≪ l'ensemble du tirage est unicolore ≫. On use de la formule des probabilités composées.*

Exercice 02

Résoudre (on diagonalisera une certaine matrice) le système différentiel (Σ) :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \end{array}\right. \text{, avec la condition initiale } x_1(0) = 0, x_2(0) = 1, x_3(0) = -2.$$

Problème

Inspiré du Concours National Marocain, épreuve de Math I, filière TSI en 2017

On note $\mathbf{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs et $\mathbf{R}_+^\star$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on considère la fonction ϕ_t définie sur $\mathbf{R}$ de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \phi_t(x) = \frac{e^{-t}}{1 + x^2 t^2}.$$

De plus, on considère la fonction réelle f définie par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \phi_t(x)\, dt$.

Partie A

1. Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\, dt = \frac{1}{k^2}$.
2. Soit $x \in]0, \pi]$.
   (a) Écrire la formule de Leonhard Euler appliquée à $\sin\left(\frac{nx}{2}\right)$ puis celle appliquée à $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$.
   Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $e^{ix}\dfrac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = \dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{i\frac{(n+1)x}{2}}$.

   (b) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}$ sous la forme d'un rapport sans le signe somme.

   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.
3. Soit Ψ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.
   Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \int_0^{\pi} \Psi(x) \sin(mx)\, dx = 0$.
4. Soit g définie sur $[0, \pi]$ par : $x \mapsto \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\frac{x^2}{2\pi} - x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \in]0, \pi] \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{array}\right.$.
   Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$.
   Écrire le développement limité au voisinage de 0 de $\sin(x/2)$ et de $\cos(x/2)$ à l'ordre 2.
   Montrer enfin que g est continue sur $[0, \pi]$ puis de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

T.S.V.P $\rightarrow$

5. Montrer : $2\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) = \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) + \sin\left(\frac{-x}{2}\right)$.
6. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{4\pi} - \frac{t}{2}\right) dt$.
7. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} g(x)\sin\left(\frac{(2n+1)}{2}x\right) dx$.
8. Déterminer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

Partie B

1. Montrer que le domaine de définition de f est $\mathbf{R}$. Étudier la parité de f.
2. On désire étudier la continuité de f.
   (a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, ϕ_t est dérivable (par rapport à x) sur $\mathbf{R}_+$ et que pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $|\phi_t'(x)| \leqslant te^{-t}$.
   (b) Justifier : $\exists\, c \in]x, x+h[$, $\phi_t(x+h) - \phi_t(x) = h\phi_t'(c)$.
   En déduire : $\forall (t,x) \in (\mathbf{R}_+)^2$, $\forall h \in \mathbf{R}^\star$ avec $x+h \geqslant 0$, $\left|\dfrac{e^{-t}}{1+(x+h)^2t^2} - \dfrac{e^{-t}}{1+x^2t^2}\right| \leqslant |h|te^{-t}$.
   (c) En déduire que f est continue sur $\mathbf{R}$.
3. Déterminer la monotonie de f sur $\mathbf{R}$.
4. Montrer que, pour tout réel strictement positif x, $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du$.
   Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
5. On étudie la nature de l'intégrale généralisée : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.
   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}_+^\star$, $e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\arctan(\sqrt{x}) \leqslant \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du \leqslant \arctan(\sqrt{x})$.
   (b) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du$.
   (c) Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}_+^\star$, $0 \leqslant \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du \leqslant \frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{x})$.
   (d) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du$.
   (e) Donner un équivalent simple de f au voisinage de $+\infty$.
   (f) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ est divergente.

Partie C

1. Soit $n \in \mathbf{N}$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\displaystyle\int_0^{n} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant 1 + \int_0^{n} f(t)\,dt$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ est une série divergente.
   (c) En déduire que S_n est équivalente à $\displaystyle\int_0^{n} f(t)\,dt$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\phi_1(n^2x)\,dx$.
   Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est convergente et calculer sa valeur.