Devoir surveillé n°03

CORRECTION

Exercice 01

Ici :

$$P(U) = P\left([B_1 \cap B_2 \cap B_3] \cup [N_1 \cap N_2 \cap N_3]\right) = P\left(B_1 \cap B_2 \cap B_3\right) + P\left(N_1 \cap N_2 \cap N_3\right).$$

Or :

$$P\left(B_1 \cap B_2 \cap B_3\right) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1\cap B_2}(B_3) = \frac{2}{6} \times \frac{6}{11} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{44}.$$

Et :

$$P\left(N_1 \cap N_2 \cap N_3\right) = P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1\cap N_2}(N_3) = \frac{4}{6} \times \frac{6}{11} \times \frac{4}{8} = \frac{2}{11}.$$

Ainsi : $P(U) = \dfrac{13}{44}$.

Exercice 02

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est :

$$\chi_A(u) = \begin{vmatrix} u-1 & -1 & -1 \\ -1 & u-1 & -1 \\ -1 & -1 & u-1 \end{vmatrix}.$$

Par exemple, on fait $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$ puis $L_2 \leftarrow L-2+L_3$ et on développe selon la troisième colonne, cela donne $u^2(u-3) = \chi_A(u)$. Donc 0 est double et 3 simple. On aurait aussi pu remarquer que A est de rang 1 car elle a tous ces coefficients égaux à 1 en bonne matrice Attila qu'elle est. Donc le noyau est de dimension 2 et comme la trace est 3, il ne reste qu'une valeur propre non nulle est est 3.
Rapidement, $E_0(A)$ est le plan $x+y+z=0$ et $E_3(A)$ est la droite portée par $(1,1,1)$. On peut poser :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \text{Diag}\,(0,0,3).$$

Alors $D = P^{-1}AP$ et on résout présentement :

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = DY(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}.$$

Il existe $(K_1, K_2, K_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3e^{3t} \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} K_1 + K_3e^{3t} \\ K_2 + K_3e^{3t} \\ -K_1 + K_2 + K_3e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Il reste à exploiter les conditions initiales :

$$K_1 + K_3 = 0,\ K_2 + K_3 = 1,\ -K_1 - K_2 + K_3 = -2.$$

Il reste : $K_1 = \dfrac{1}{3}$, $K_2 = \dfrac{4}{3}$ et $K_3 = -\dfrac{1}{3}$. Alors :

$$X(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}e^{3t} \\[2ex] \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{3}e^{3t} \\[2ex] -\dfrac{5}{3} - \dfrac{1}{3}e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Problème

On note $\mathbf{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs et $\mathbf{R}_+^\star$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on considère la fonction ϕ_t définie sur $\mathbf{R}$ de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \phi_t(x) = \frac{e^{-t}}{1 + x^2t^2}.$$

De plus, on considère la fonction réelle f définie par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \phi_t(x)\, dt.$$

Partie A

Cette partie est le calcul de la somme de la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.

1) On veut montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\, dt = \frac{1}{k^2}$.
On va faire de manière classique deux intégrations par parties successives, en remarquant á chaque fois que les fonctions considérées sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.
La fonction $t \mapsto \dfrac{t^2}{2\pi} - t$ et la fonction $t \mapsto \cos(kt)$ sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\, dt = -\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\frac{\sin(kt)}{k}\, dt + \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi,$$

par une première intégration par parties. Or :

$$\left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi = 0 - 0 = 0.$$

Il reste :

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\,dt = -\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi}-1\right)\frac{\sin(kt)}{k}\,dt.$$

On effectue une deuxième intégration par parties car $t\mapsto \dfrac{t}{\pi}-1$ et $t\mapsto \dfrac{\sin(kt)}{k}$ sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$:

$$-\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi}-1\right)\frac{\sin(kt)}{k}\,dt = \int_0^\pi \frac{1}{\pi}\frac{1-\cos(kt)}{k^2}\,dt + \left[\left(-\frac{t}{\pi}+1\right)\frac{-\cos(kt)}{k^2}\right]_0^\pi.$$

Or :

$$\left[\left(-\frac{t}{\pi}+1\right)\frac{-\cos(kt)}{k^2}\right]_0^\pi = 0-\left(-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{1}{k^2}.$$

Il reste :

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\,dt = -\int_0^\pi \frac{1}{\pi}\frac{\cos(kt)}{k^2}\,dt+\frac{1}{k^2}.$$

Enfin :

$$\int_0^\pi \frac{1}{\pi}\frac{\cos(kt)}{k^2}\,dt = \left[-\frac{1}{\pi k^2}\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi = 0-0=0.$$

D'où :

$$\forall k\in\mathbb{N}^\star,\ \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\,dt=\frac{1}{k^2}.$$

2)a) Soit $x\in]0,\pi]$. Montrons : $\forall n\in\mathbb{N}^\star,\ e^{ix}\dfrac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}=\dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i\frac{(n+1)x}{2}}$.
Pour cela, on va utiliser les formules d'Euler :

$$\sin\left(\tfrac{nx}{2}\right)=\frac{1}{2i}\left(e^{\frac{inx}{2}}-e^{-\frac{inx}{2}}\right)\text{ et }\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)=\frac{1}{2i}\left(e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}\right).$$

On écrit pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$,

$$e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}=e^{ix}\frac{e^{\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}}\frac{e^{-\frac{inx}{2}}-e^{\frac{inx}{2}}}{e^{-\frac{ix}{2}}-e^{\frac{ix}{2}}}=e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\frac{-2i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)},$$

ce qui se met sous la forme simplifiée :

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star,\ e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}=\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i\frac{(n+1)x}{2}}.$$

2)b) Supposons encore $n\in\mathbb{N}^\star$ et $x\in]0,\pi[$. On a :

$$\sum_{k=1}^n e^{ikx}=e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}},$$

en utilisant la formule qui donne la somme partielle d'une suite géométrique.
Il reste à récupérer la partie réelle de chaque membre de l'égalité précédente.

$$\sum_{k=1}^n \mathrm{Re}\left(e^(ikx)\right)=\mathrm{Re}\left(e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right),$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx)=\mathrm{Re}\left(e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right).$$

Il reste à arranger le second membre de la dernière égalité. On utilise **2)a)** :

$$\mathrm{Re}\left(e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\right)=\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

car $\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\right)=\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)$. On en déduit bien ce que l'on veut :

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star,\ \sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

3) Soit Ψ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$. On procède à une intégration par parties et l'on écrit :

$$\int_0^\pi \Psi(x)\sin(mx)\,dx=-\int_0^\pi \Psi'(x)\left[\frac{-\cos(mx)}{m}\right]\,dx+\left[\Psi(x)\frac{-\cos(mx)}{m}\right]_0^\pi.$$

Cela donne :

$$\int_0^\pi \Psi(x)\sin(mx)\,dx=\frac{1}{m}\int_0^\pi \Psi'(x)\cos(mx)\,dx+\frac{1}{m}\left[-\Psi(\pi)(-1)^m+\Psi(0)\right].$$

On remarque que $\lim\limits_{m\to+\infty}\frac{1}{m}\left[-\Psi(\pi)(-1)^m+\Psi(0)\right]=0$ car $-\Psi(\pi)(-1)^m+\Psi(0)$ est borné quand m varie.
Puis :

$$\left|\frac{1}{m}\int_0^\pi \Psi'(x)\cos(mx)\,dx\right|\leqslant\frac{1}{m}\int_0^\pi\left|\Psi'(x)\cos(mx)\right|dx.$$

Or Ψ' étant continue sur $[0,\pi]$, elle est bornée et il existe $M\in\mathbf{R}_+$, tel que pour tout $x\in[0,\pi]$, $|\Psi'(x)|\leqslant M$ et donc pour tout $x\in[0,\pi]$, $|\Psi'(x)\cos(mx)|\leqslant M$. On écrit :

$$\left|\frac{1}{m}\int_0^\pi \Psi'(x)\cos(mx)\,dx\right|\leqslant\frac{1}{m}\int_0^\pi M\,dx=\frac{M\pi}{m},$$

et cette dernière quantité tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$.
Donc : $\lim\limits_{m\to+\infty}\left|\frac{1}{m}\int_0^\pi \Psi'(x)\cos(mx)\,dx\right|=0$ et on peut conclure.

$$\lim_{m\to+\infty}\int_0^\pi \Psi(x)\sin(mx)\,dx=0.$$

4) Soit g définie sur $[0,\pi]$ par : $x\mapsto\begin{cases}\dfrac{\frac{x^2}{2\pi}-x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si}\quad x\in]0,\pi]\\[2ex] -1 & \text{si}\quad x=0\end{cases}$.

g est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ par rapport de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$, le dénominateur ne s'annulant pas.
Il reste à montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0. Pour cela, on va utiliser le théorème de raccordement. Pour montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, il suffit de montrer que g est continue sur $[0,\pi]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ (ce qui est le cas) et que $\lim\limits_{x\to0}g'(x)$ existe (et sa valeur est alors celle de la dérivée de g en 0.

Commencons donc par montrer la continuité de g en 0.
On écrit, pour tout $x\in]0,\pi]$,

$$g(x)=\frac{\frac{x^2}{2\pi}-x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Effectuons un développement limité de sin à l'ordre 1 au voisinage de 0^+ :

$$g(x)=\frac{\frac{x^2}{2\pi}-x}{2\left(\frac{x}{2}+o(x)\right)}=\frac{\frac{x}{2\pi}-1}{2\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)},$$

quantité qui tend vers -1 quand x tend vers 0. Donc $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = -1$ et g est bien continue en 0 et donc sur $[0,\pi]$ (car rapport de deux fonctions continues sur $]0,\pi]$ dont le dénominateur ne s'annule pas).
Montrons maintenant que $\lim_{x\to 0} g'(x)$ existe.
On écrit, pour tout $x \in]0,\pi]$,

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{x}{\pi} - 1\right)\left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right) \times \frac{2}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

On utilise un développement limité d'ordre 2 de sin et d'ordre 1 de cos, ce qui donne

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{x}{\pi} - 1\right)\left(2\left(\frac{x}{2} + o(x^2)\right)\right) - \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)(1 + o(x))}{4\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} = \frac{\frac{x^2}{\pi} - x + o(x^2) - \frac{x^2}{2\pi} + x}{x^2 + o(x^2)}.$$

Il reste : $g'(x) = \dfrac{\frac{x^2}{2\pi} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \dfrac{\frac{1}{2\pi} + o(1)}{1 + o(1)} \Rightarrow \lim_{x\to 0} g'(x) = \dfrac{1}{2\pi}$.
Donc, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.
5) Montrons :

$$2\sin\left(\tfrac{nx}{2}\right)\cos\left(\tfrac{(n+1)x}{2}\right) = \sin\left(\tfrac{(2n+1)x}{2}\right) + \sin\left(\tfrac{-x}{2}\right).$$

La méthode la plus rapide est de demander de l'aide à Leonhard (s'il le veut bien). On écrit :

$$2\sin\left(\tfrac{nx}{2}\right)\cos\left(\tfrac{(n+1)x}{2}\right) = 2\left(\frac{e^{\frac{inx}{2}} - e^{-\frac{inx}{2}}}{2i}\right)\left(\frac{e^{\frac{i(n+1)x}{2}} + e^{-\frac{i(n+1)x}{2}}}{2}\right).$$

On développe et :

$$2\sin\left(\tfrac{nx}{2}\right)\cos\left(\tfrac{(n+1)x}{2}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{(2n+1)}{2}x} + e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{(2n+1)}{2}x}\right.$$

C'est bien $\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

6. On calcule : $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{4\pi} - \frac{t}{2}\right) dt = \left[\frac{t^3}{12\pi} - \frac{t^2}{4}\right]_0^\pi = -\frac{\pi^2}{6}$.

7. Déterminons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. En utilisant **1)**, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\, dt,$$

puis cette égalité devient (en utilisant **2)**,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} dt = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{2\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} dt.$$

Il reste à utiliser la formule trigonométrique classique (rappelée en Q5) :

$$2\sin\left(\tfrac{nx}{2}\right)\cos\left(\tfrac{(n+1)x}{2}\right) = \sin\left(\tfrac{(2n+1)x}{2}\right) + \sin\left(\tfrac{-x}{2}\right).$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) + \sin\left(\frac{-x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} dt.$$

Cela donne, en usant de la définition de la fonction g,

$$(1)\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi g(x)\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) dx - \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{4\pi} - \frac{t}{2}\right) dt.$$

Ainsi (1) devient :

$$(2)\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi} g(x) \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) dx + \frac{\pi^2}{6}.$$

Puis comme g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, on peut appliquer le résultat de la question **3)** :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} g(x) \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) dx = 0.$$

Il reste à faire tendre n vers $+\infty$ dans (2) et :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Partie B

1) Pour x fixé in $\mathbf{R}$, $\phi_t(x) = O(e^{-t})$ et comme $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, f existe pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Le domaine de définition de f est $\mathbf{R}$.

Comme pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = f(x)$, f est paire. **2)a)** On désire étudier la continuité de f.
- Si $t = 0$, $\Psi_t(x) = 1$ pour tout x et cette fonction est dérivable sur $\mathbf{R}_+$.
- Si $t > 0$, ϕ_t est dérivable par rapport à x par rapport de fonctions dérivables par rapport à x et :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+,\ \forall x \in \mathbf{R}_+,\ \phi_t'(x) = \frac{-e^{-t}2xt^2}{(1+x^2t^2)^2}.$$

Puis, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$|\phi_t'(x)| \leqslant te^{-t} \Leftrightarrow \left|\frac{-e^{-t}2xt^2}{(1+x^2t^2)^2}\right| \leqslant te^{-t},$$

c'est-à-dire

$$\frac{e^{-t}2xt^2}{(1+x^2t^2)^2} \leqslant te^{-t} \Leftrightarrow \frac{2xt}{(1+x^2t^2)^2} \leqslant 1 \Leftrightarrow 2xt \leqslant (1+x^2t^2)^2.$$

Si l'on pose $u = xt$, il s'agit d'étudier le signe de $g(u) = (1+u^2)^2 - 2u$. Si $g(u) \geqslant 0$ pour $u \geqslant 0$ alors l'inégalité à montrer est vraie.
Donc : $g(u) = (1+u^2)^2 - 2u = u^4 + 2u^2 - 2u + 1$.
On a : $g'(u) = 4u^3 + 4u - 2$ et $g''(u) = 12u^2 + 4$.
Donc $g''(u)$ est toujours positif et donc $g'(u)$ est croissante. Comme $g'(0) = -2$, il existe une valeur $\alpha > 0$ et une seule qui annule g'. Ainsi, g est décroissante sur $[0,\alpha]$ avec $g(0) = 1$ et g est croissante sur $[\alpha,+\infty[$.
Il reste à déterminer le signe de $g(\alpha)$. On a :

$$g'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha^3 = -2\alpha + 1.$$

Donc : $g(\alpha) = \alpha^4 + 2\alpha^2 - 2\alpha + 1 = \alpha^4 + 2\alpha^2 + 2\alpha^3 > 0$.
La fonction g est bien à valeurs positives sur $\mathbf{R}_+$ et on a l'inégalité demandée :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+,\ \forall x \in \mathbf{R}_+,\ |\phi_t'(x)| \leqslant te^{-t}.$$

2)b) On peut en déduire : $\forall (t,x) \in (\mathbf{R}_+)^2$, $\forall h \in \mathbf{R}^\star$ avec $x + h \geqslant 0$,

$$\left|\frac{e^{-t}}{1+(x+h)^2t^2} - \frac{e^{-t}}{1+x^2t^2}\right| \leqslant |h|te^{-t}.$$

En effet, l'égalité des accroissements finis (le TAF pour les intimes) peut être appliqué :

$$\exists\, c \in]x, x+h[,\ \phi_t(x+h) - \phi_t(x) = h\phi_t'(c).$$

Donc : $|\phi_t(x+h)-\phi_t(x)| \leqslant |h|te^{-t}$. C'est ce que l'on voulait.

2)c) Pour tout x_0 fixé dans $\mathbf{R}_+$,

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\int_0^{+\infty}\phi_t(x_0+h)\,dt-\int_0^{+\infty}\phi_t(x_0)\,dt,$$

c'est-à-dire :

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\int_0^{+\infty}\left[\phi_t(x_0+h)-\phi_t(x_0)\right]\,dt,$$

ce qui entraîne :

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|\leqslant\int_0^{+\infty}|\phi_t(x_0+h)-\phi_t(x_0)|\,dt\leqslant\int_0^{+\infty}|h|te^{-t}\,dt.$$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty}te^{-t}\,dt$ a une valeur finie (que même le commun des mortels peut calculer). Donc si h tend vers 0, $|f(x_0+h)-f(x_0)|$ tend vers 0 et on a : $\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0)$. Ce qui signifie que f est continue en x_0. Et donc f est continue sur $\mathbf{R}_+$. Comme f est paire, f est continue sur $\mathbf{R}$.

3) Reprenons pour $x\in\mathbf{R}_+$ et $h\geqslant 0$,

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\int_0^{+\infty}\left[\phi_t(x_0+h)-\phi_t(x_0)\right]\,dt.$$

On remarque que $\phi_t(x_0+h)\leqslant\phi_t(x_0)$ et donc :

$$f(x_0+h)-f(x_0)\leqslant 0.$$

On peut conclure : f est décroissante sur $\mathbf{R}_+$. Par parité, on étend à $\mathbf{R}$:

$$f \text{ est croissante sur } \mathbf{R}_- \text{ et décroissante sur } \mathbf{R}_+.$$

4) Soit $x>0$ et posons le changement de variable $u=xt$ dans l'intégrale définissant f :

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1+x^2t^2}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\times\frac{1}{x}\,du,$$

ce qui donne bien :

$$\forall x\in\mathbf{R}_+^\star,\ f(x)=\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du.$$

On remarque maintenant que $\left|e^{-\frac{u}{x}}\right|\leqslant 1$ pour tout $u>0$ et pour tout $x>0$. Donc :

$$|f(x)|\leqslant\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}\,du=\frac{\pi}{2x}.$$

Il reste à faire tendre x vers $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{2x}=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

5)a) Le but du jeu est la nature de l'intégrale généralisée : $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$.
On a les implications pour $x>0$,

$$0\leqslant u\leqslant\sqrt{x}\Rightarrow-\sqrt{x}\leqslant -u\leqslant 0\Rightarrow-\frac{1}{\sqrt{x}}\leqslant-\frac{u}{x}\leqslant 0$$

$$\Rightarrow e^{-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}\leqslant e^{-\dfrac{u}{x}}\leqslant 1.$$

Il reste à intégrer :

$$e^{-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{du}{1+u^2}\leqslant\int_0^{\sqrt{x}}\frac{e^{-\dfrac{u}{x}}}{1+u^2}\,du\leqslant\int_0^{\sqrt{x}}\frac{du}{1+u^2}.$$

Cela donne bien :

$$\forall x\in\mathbf{R}_+^\star,\ e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\arctan(\sqrt{x})\leqslant\int_0^{\sqrt{x}}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du\leqslant\arctan(\sqrt{x}).$$

5)b) On fait tendre x vers $+\infty$ dans la double inégalité précédente. On a entre autre :

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan\sqrt{x}=\frac{\pi}{2}\ \text{et}\ \lim_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}=1.$$

On en déduit par le théorème des Gendarmes,

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du.$$

5)c) On écrit (car $e^{-\frac{u}{x}}\leqslant 1$) :

$$0\leqslant\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du\leqslant\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}-\int_0^{\sqrt{x}}\frac{du}{1+u^2}.$$

Et donc, en intégrant les deux dernières intégrales :

$$\forall x\in\mathbf{R}_+^\star,\ 0\leqslant\int_{\sqrt{x}}{}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du\leqslant\frac{\pi}{2}-\arctan(\sqrt{x}).$$

5)d) On écrit :

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du=\int_0^{\sqrt{x}}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du+\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du.$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du=\frac{\pi}{2}\ \text{et}\ \lim_{x\to+\infty}\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan\sqrt{x}\right]=0.$$

Donc, on peut en déduire que :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du=\frac{\pi}{2}.$$

5)e) On en déduit un équivalent simple de f au voisinage de $+\infty$. En effet, quand x tend vers $+\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}xf(x)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow f(x)\sim\frac{\pi}{2x}.$$

5)f) $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$ est définie en 0 et f étant à valeurs positives, et comme $f(x)\sim\dfrac{\pi}{2x}$, quand x tend vers $+\infty$ et comme $x\mapsto\dfrac{\pi}{2x}$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$, on peut en déduire que :

$$\int_0^{+\infty}f(x)\,dx\ \text{est divergente.}$$

Partie C

1)a) Soit $n\in\mathbf{N}$, on pose : $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}f(k)$. On écrit pour tout $k\in\mathbf{N}$,

$$(1)\ \ f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(t)\,dt\leqslant f(k).$$

On somme la première inégalité de (1) de 0 à $n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \leqslant \int_0^n f(t)\,dt \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)\,dt.$$

Or $f(0)=1$ et il reste : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant 1 + \int_0^n f(t)\,dt$.
On somme la deuxième inégalité de (1) de 0 à $n-1$:

$$\int_0^n f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k)$$

car $f(n) \geqslant 0$. On a bien :

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ \int_0^n f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant 1 + \int_0^n f(t)\,dt.$$

1)b) Quand n tend vers $+\infty$, $\displaystyle\int_0^n f(t)\,dt$ tend vers $+\infty$ car l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est divergente. Alors, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ est une série divergente car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f(k) = +\infty$.

1)c) On peut en déduire que S_n est équivalente à $\displaystyle\int_0^n f(t)\,dt$.

En effet, dans la double inégalité de **1)a)**, on la divise par $\displaystyle\int_0^n f(t)\,dt > 0$. On a :

$$1 \leqslant \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)}{\displaystyle\int_0^n f(t)\,dt} \leqslant \frac{1}{\displaystyle\int_0^n f(t)\,dt} + 1.$$

Il suffit de faire tendre n vers $+\infty$ et les deux membres extremes de la double inégalité tendent vers 1. Il reste :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)}{\displaystyle\int_0^n f(t)\,dt} = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} f(k) \sim \int_0^n f(t)\,dt.$$

2) On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \phi_1(n^2x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1}}{1+n^4x^2}$.
Il reste à poser le changement de variable $u = n^2x$ dans la dernière intégrale et :

$$v_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1}}{1+u^2}\frac{du}{n^2} = \frac{1}{n^2e}\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2n^2e}.$$

Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est convergente et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2n^2e} = \frac{\pi}{2e}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{2e}\times\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^3}{12e}.$$