Devoir libre 04 spécial réveillon

2TSI. Mathématiques

A rendre le lundi 06 janvier 2020 au plus tard

Questions de cours

1. Citer le théorème de Cauchy linéaire pour un système différentiel.
2. On rappelle que j est le nombre complexe : $\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, où i vérifie $\mathrm{i}^2 = -1$.
   (a) Déterminer le module et un argument de j.
   (b) Déterminer la valeur de $s_k = 1 + \mathrm{j}^k + \mathrm{j}^{2k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (c) Déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ du système :
   $$\begin{cases} a & +b & +c & = 1 \\ a & +\mathrm{j}b & +\mathrm{j}^2 c & = 0 \\ a & +\mathrm{j}^2 b & +\mathrm{j}c & = 0 \end{cases},$$
   où a, b et c sont les inconnues.
3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
   Donnons sans démonstration l'expression du déterminant de Vandermonde de la matrice :
   $$V_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_0^2 & \gamma_1^2 & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \gamma_0^{n-1} & \gamma_1^{n-1} & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$
   Alors : $\mathsf{Det}\,(V_\gamma) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n-1} (\gamma_j - \gamma_i)$.
   Calculer le déterminant du système de **2.3** en utilisant cette formule puis écrire le résultat en fonction de j^2 seul.

Partie I

Soient $n \geqslant 3$ un entier naturel, $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1})$ une famille de n éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et :

$$V_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_0^2 & \gamma_1^2 & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \gamma_0^{n-1} & \gamma_1^{n-1} & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}).$$

T.S.V.P $\rightarrow$

1. Montrer que s'il existe un couple $(i,j) \in [\![0,n-1]\!]^2$ avec $i \neq j$ tel que $\gamma_i = \gamma_j$, alors : $\mathsf{Det}\,(V_\gamma) = 0$.
2. On suppose les γ_i distincts deux à deux et on note C_j la colonne d'indice j de la matrice V_γ^T.

   Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des scalaires tels que : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j = 0$.

   En utilisant le polynôme :
   $$P = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X^{j-1},$$
   montrer : $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_j = 0$.
   Que peut-on en déduire pour $\mathsf{Det}\,(V_\gamma)$? **On ne calculera pas** $\mathsf{Det}\,(V_\gamma)$.
3. On suppose toujours que les γ_k sont distincts deux à deux.
   Pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction ψ par : $x \mapsto e^{\gamma_k x}$.

   (a) Soient $(m_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ un n-uplet de scalaires, et $\Psi = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} m_k \psi_k$.
   Calculer les dérivées successives de Ψ jusqu'à l'ordre $n-1$.

   (b) En déduire que la famille $(\psi_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ est libre dans $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$.

Partie II

Soit (E_1) l'équation différentielle : $y^{(3)} = y$.

1. Soit f une solution à valeurs complexes de cette équation.

   (a) Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre (E_2) vérifiée par la fonction :
   $$g = f + f' + f''.$$

   (b) Résoudre l'équation (E_2).

   (c) En déduire l'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation (E_1).
   Indication : on commencera par résoudre : $f''(t) + f'(t) + f(t) = \lambda e^t$, où λ est fixé dans $\mathbb{R}$.
2. Soit (S) le système différentiel à coefficients constants $X' = AX$ où
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C}),$$
   et : $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, où x, y et z sont des fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$.

   (a) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$? dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$?

   (b) Résoudre le système (S).

   (c) Retrouver alors par cette méthode les solutions de l'équation (E_1) obtenues à la question **1.3.** de cette partie.
3. On considère la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

(a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière. On note alors, lorsque cela existe, $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

(b) Justifier que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(c) Déterminer les développements en série entière de φ', φ'', $\varphi^{(3)}$ puis $\varphi^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(d) En utilisant les questions précédentes, déterminer une expression de φ n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles**.

(e) Déterminer une expression de $\psi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}$ n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles**.

(f) Déterminer une expression de $\theta(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{6n}}{(6n)!}$ n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles**.

Partie III

Dans la suite du problème :

— toutes les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;

— n est un entier naturel supérieur ou égal à 3 ;

— $\alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ est un élément de $\mathbb{K}^n$ et

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}).$$

En outre, lorsque $y \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, on note : $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ qui est donc un élément de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$.

Soient :

— (E_α) l'équation différentielle linéaire : $y^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}$;

— $\mathcal{S}_\alpha = \left\{ f \in \mathrm{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{K}), \quad f^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{(k)} \right\}$.

1.

(a) Écrire l'équation différentielle (E_α) à l'aide d'un système différentiel.

(b) Montrer que si $y \in \mathcal{S}_\alpha$, alors $y \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

(c) Prouver que $\mathcal{S}_\alpha$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

(d) Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_\alpha$.

On prend jusqu'à la fin de cette partie : $\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$ **et** $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

2. Écrire l'équation (E_α) dans ce cas.
3. Déterminer tous les nombres complexes r pour lesquels la fonction $x \mapsto e^{rx}$ appartient à $\mathcal{S}_\alpha$.
4. Donner une base de $\mathcal{S}_\alpha$. (On pourra utiliser des résultats obtenus dans la partie I)
5. Soit d l'application qui à $y \in \mathcal{S}_\alpha$ associe $d(y) = y'$.

(a) Vérifier que d est un endomorphisme de $\mathcal{S}_\alpha$.

(b) L'endomorphisme d est-il bijectif ?

(c) L'endomorphisme d est-il diagonalisable ?

Partie IV

Dans cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (et donc : $\mathcal{S}_\alpha = \left\{ f \in \mathrm{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{(k)} \right\}$), $n = 2p$ et on considère l'équation différentielle : $y^{(2p)} = y$.
On note S_1 (resp. S_2) l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle : $y^{(p)} = y$ (resp. $y^{(p)} = -y$).
Pour f et g dans $\mathcal{S}_\alpha$, on note : $(f \mid g) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|} \left(f(t)g(t) + f^{(p)}(t)g^{(p)}(t) \right) dt$.

1. Montrer que cette expression a un sens pour tous f et g de $\mathcal{S}_\alpha$.
   On admettra que pour tout f de $\mathcal{S}_\alpha$, on a au voisinage de $+\infty$: $f(t) = O(e^t)$ et au voisinage de $-\infty$: $f(t) = O(e^{-t})$.

   La suite ne peut être traitée que par les 5/2 donc 3/2 s'abstenir !
2. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{S}_\alpha$.
3. Montrer que S_1 et S_2 sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{S}_\alpha$.
4. *Exemple :* $n = 4$ et $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{4k}}{(4k)!}$.

   On admet que f est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ tout entier.
   (a) Déterminer α de sorte que $f \in \mathcal{S}_\alpha$.
   (b) Expliciter les projetés orthogonaux de f sur S_1 et sur S_2.
   (c) En déduire une expression de f à l'aide de fonctions usuelles réelles.