

DEVOIR LIBRE 04

2TSI

Corrigé

Questions de cours

1. Nous citons le théorème de Cauchy linéaire pour un système différentiel ; ici n est un entier naturel non nul, la lettre \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et I est un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point. Soient $A : I \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow M_{n,1}(\mathbb{K})$ deux applications continues sur I . On fixe $t_0 \in I$ et $Y_0 \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in I, Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t), \\ Y(t_0) = Y_0, \end{cases}$$

admet exactement une solution $Y \in C^1(I, M_{n,1}(\mathbb{K}))$.

Ce théorème peut se reformuler en disant que l'application $Y \mapsto Y(t_0)$ définit une application de l'ensemble des solutions de $Y' = AY + B$ dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$, surjective (ceci équivaut à l'existence d'une solution) et injective (ceci équivaut à l'unicité de la solution), donc bijective. En particulier, si $B = 0$, c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels. C'est ainsi que nous l'utiliserons dans ce sujet (question 1.3 de la partie II, et question 1.4 de la partie III).

2.

(2.1) On a :

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}},$$

ce dont on déduit immédiatement : $|j| = 1$, et : $\arg(j) \equiv \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

(2.2) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a : $s_k = 1 + j^k + (j^k)^2$. On reconnaît la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison j^k . Pour la calculer, deux cas de figure sont à considérer, selon que j^k égale 1 ou non ; nous allons d'abord déterminer à quelle condition sur k cela se produit : on a $j^k = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^k = e^{\frac{2i\pi k}{3}}$. Par conséquent :

$$j^k = 1 \iff e^{\frac{2i\pi k}{3}} = 1 \iff \frac{2\pi k}{3} \equiv 0 \pmod{2\pi} \iff \exists \ell \in \mathbb{Z}, \frac{2\pi k}{3} = 2\pi\ell \iff \exists \ell \in \mathbb{Z}, k = 3\ell,$$

donc en résumé : $j^k = 1$ si et seulement si k est un multiple entier de 3.

Revenons à l'étude de s_k :

— si $k \equiv 0 \pmod{3}$, alors $j^k = 1$, et donc : $s_k = 3$;

— si $k \not\equiv 0 \pmod{3}$, alors $j^k \neq 1$, et on a :

$$s_k = \frac{(j^k)^3 - 1}{j^k - 1} = \frac{j^{3k} - 1}{j^k - 1},$$

mais dans ce cas : $j^{3k} = e^{\frac{2i\pi \cdot (3k)}{3}} = e^{2i\pi k} = 1$, donc $s_k = 0$.

En résumé :

$$s_k = \begin{cases} 3 & \text{si } k \equiv 0 \pmod{3}, \\ 0 & \text{si } k \not\equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}$$

(2.3) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$\begin{cases} a + b + c = 1, \\ a + jb + j^2c = 0, \\ a + j^2b + jc = 0, \end{cases}$$

et notons L_1, L_2 et L_3 les lignes respectives du système. Les opérations $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$, $L_1 \leftarrow L_1 + jL_2 + j^2L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 + j^2L_2 + jL_3$ donnent respectivement :

$$\begin{cases} 3a + s_1b + s_1c = 1, \\ s_1a + s_2b + 3c = 1, \\ s_1a + 3b + s_2c = 1, \end{cases}$$

c'est-à-dire, d'après la question précédente (où l'on démontre que $s_1 = s_2 = 0$ en particulier) :

$$\begin{cases} 3a = 1, \\ 3c = 1, \\ 3b = 1, \end{cases}$$

donc : $(a, b, c) = \frac{1}{3}(1, 1, 1)$. On vérifie réciproquement que ce triplet est effectivement solution (nous avons encore besoin de la relation $s_1 = 0$). On en déduit que l'ensemble des solutions $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ du système est :

$$\left\{ \frac{1}{3}(1, 1, 1) \right\}.$$

3. On a : $\det(V_\gamma) = \prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (\gamma_j - \gamma_i)$.

PARTIE I

1. S'il existe un couple $(i, j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2$ avec $i \neq j$ tel que $\gamma_i = \gamma_j$, alors la $(i+1)$ -ième et la $(j+1)$ -ième colonne de V_γ sont égales. Les colonnes de la matrice V_γ sont donc liées, et : $\det(V_\gamma) = 0$.

2. L'hypothèse : $\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0$ se traduit ainsi, lorsqu'on regarde les coefficients de ce vecteur colonne :

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma_i^{j-1} = 0,$$

c'est-à-dire, en utilisant la notation $P = \sum_{j=1}^n \lambda_j X^{j-1}$ de l'énoncé :

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad P(\gamma_i) = 0.$$

Autrement dit, les nombres complexes $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}$ sont racines de P . Or ils sont supposés distincts dans cette question, donc on a énuméré là n racines de P , alors qu'il est clair que $\deg(P) \leq n-1$: ce n'est possible que si P est le polynôme nul ; ainsi $P = 0$, et donc tous ses coefficients sont nuls, c'est-à-dire :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda_j = 0.$$

On a implicitement démontré ici que si les γ_i , pour $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, sont tous distincts, alors la famille des vecteurs colonnes de ${}^t V_\gamma$ est libre, donc ${}^t V_\gamma$ est inversible et V_γ également. On en déduit : $\det(V_\gamma) \neq 0$.

3.

(3.1) Tout d'abord, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ l'application ψ_k est bien sûr de classe C^∞ sur \mathbb{R} , en tant que composition de l'application polynomiale $x \mapsto \gamma_k x$ (continue sur \mathbb{R} et à valeurs dans $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$) et de l'exponentielle ; on a par une récurrence immédiate :

$$\forall \ell \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi_k^{(\ell)}(x) = \gamma_k^\ell e^{\gamma_k x} = \gamma_k^\ell \psi_k(x).$$

En tant que somme d'applications de classe C^∞ sur \mathbb{R} , l'application Ψ est infiniment dérivable sur \mathbb{R} , et on a :

$$\forall \ell \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \Psi^{(\ell)} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \psi_k^{(\ell)} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \gamma_k^\ell \psi_k.$$

(3.2) Soit $(m_0, \dots, m_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $\sum_{k=0}^{n-1} m_k \psi_k = 0$. Montrons : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, m_k = 0$; cela démontrera l'indépendance linéaire de la famille $(\psi_k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$.

Avec les notations de la question précédente, l'hypothèse : $\sum_{k=0}^{n-1} m_k \psi_k = 0$ signifie que $\Psi = 0$.

Ses dérivées successives sont donc identiquement nulles. En les évaluant en 0 on a, du fait que $\psi_k(0) = 1$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$\forall \ell \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \sum_{k=0}^{n-1} m_k \gamma_k^\ell = 0,$$

c'est-à-dire, en écrivant matriciellement ces n égalités :

$$V_\gamma \begin{pmatrix} m_0 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = 0_{M_{n,1}(\mathbb{K})}.$$

Or il est supposé ici que les γ_i , pour $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, sont tous distincts, donc la matrice V_γ est inversible d'après la question **2**. L'égalité ci-dessus implique donc :

$$\begin{pmatrix} m_0 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = 0_{M_{n,1}(\mathbb{K})},$$

c'est-à-dire : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, m_k = 0$. D'où le résultat qu'on voulait démontrer. La famille $(\psi_k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ est bien libre dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

PARTIE II

1.

(1.1) Si f est une solution de (E_1) , alors f est de classe C^3 sur \mathbb{R} , donc f' est de classe C^2 et f'' de classe C^1 sur \mathbb{R} . En particulier elles sont dérivables sur \mathbb{R} . En tant que somme d'applications dérivables sur \mathbb{R} , l'application $g = f + f' + f''$ est également dérivable sur \mathbb{R} , et on a : $g' = f' + f'' + f^{(3)}$. Or $f^{(3)} = f$ puisque f vérifie (E_1) par hypothèse, donc :

$$g' = f' + f'' + f = g,$$

ainsi g est une solution de l'équation différentielle du premier ordre (E_2) : $y' = y$.

(1.2) La résolution de (E_2) est très standard. L'ensemble de ses solutions est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} \\ t \mapsto \lambda e^t \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

(1.3) Si f est une solution de l'équation (E_1) , alors d'après la question **1.1** de cette partie, l'application $g = f + f' + f''$ est solution de (E_2) . Donc, d'après la question précédente, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \lambda e^t.$$

C'est-à-dire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f''(t) + f'(t) + f(t) = \lambda e^t. \tag{E_\lambda}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre, dont le membre de droite est de forme exponentielle : nous savons résoudre une telle équation. Ses solutions sont somme

d'une solution particulière et d'une solution de l'équation différentielle homogène associée : déterminons ces solutions.

Résolution de l'équation différentielle homogène associée à (E_λ) : $y'' + y' + y = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$. Nous avons démontré, dans la question **2.2** de cours, que $s_1 = j^2 + j + 1 = 0$ et $s_2 = (j^2)^2 + j^2 + 1 = 0$. Ainsi j et j^2 sont deux solutions distinctes de l'équation caractéristique (en effet $j \neq j^2$ vu que $j \neq 0$ et $j \neq 1$). On en déduit que l'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$ est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \alpha e^{jt} + \beta e^{j^2 t} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \end{array} \right\}.$$

Détermination d'une solution particulière de (E_λ) . On considère $f_p : t \mapsto \mu e^t$, où $\mu \in \mathbb{C}$. L'application f_p est bien sûr de classe C^2 sur \mathbb{R} , et vérifie (E_λ) si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mu e^t + \mu e^t + \mu e^t = \lambda e^t \iff 3\mu = \lambda \iff \mu = \frac{\lambda}{3}.$$

Ainsi $f_p : t \mapsto \frac{\lambda}{3} e^t$ est une solution particulière de (E_λ) .

Conclusion. L'ensemble des solutions à valeurs complexes de (E_λ) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \alpha e^{jt} + \beta e^{j^2 t} + \frac{\lambda}{3} e^t \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \end{array} \right\}.$$

Voyons comment en déduire l'ensemble \mathcal{H} des solutions de (E_1) : si f est une solution de (E_1) , alors d'après ce qui précède il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que f soit solution de (E_λ) ; or nous avons démontré à l'instant que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'ensemble des solutions de (E_λ) est inclus dans : $\mathcal{H}' = \text{Vect}_{\mathbb{C}} \left(\left\{ t \mapsto e^{jt}, t \mapsto e^{j^2 t}, t \mapsto e^t \right\} \right)$. On en déduit : $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}'$. De plus :

- d'après le théorème de Cauchy linéaire, l'application $Y \mapsto Y(0)$ définit un isomorphisme de \mathbb{C} -espaces vectoriels entre \mathcal{H} et $M_{3,1}(\mathbb{C})$, donc : $\dim(\mathcal{H}) = \dim(M_{3,1}(\mathbb{C})) = 3$;
- la famille $(t \mapsto e^{jt}, t \mapsto e^{j^2 t}, t \mapsto e^t)$ est libre d'après la question **3.2** de la partie I, donc : $\dim(\mathcal{H}') = 3$.

Ainsi nous avons une inclusion entre deux espaces vectoriels de même dimension, donc ils sont égaux. En conclusion, l'ensemble des solutions à valeurs complexes de (E_1) est :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}' = \text{Vect}_{\mathbb{C}} \left(\left\{ t \mapsto e^{jt}, t \mapsto e^{j^2 t}, t \mapsto e^t \right\} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \alpha e^{jt} + \beta e^{j^2 t} + \gamma e^t \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \end{array} \right\}.$$

Remarque. On peut aussi vérifier par un calcul direct que réciproquement, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, toutes les solutions de (E_λ) sont des solutions de (E_1) . Nous en faisons ici l'économie.

2.

(2.1) Un bref calcul de déterminant montre que le polynôme caractéristique de A est :

$$\chi_A = X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1).$$

Dans la résolution de la question 1.3 dans la partie II, nous avons implicitement déterminé les racines du polynôme $X^2 + X + 1$: il s'agit de j et j^2 . On en déduit :

$$\chi_A = (X - 1)(X^2 + X + 1) = (X - 1)(X - j)(X - j^2).$$

Cela permet de répondre à la question de la diagonalisation de A :

- le polynôme caractéristique de A n'est pas scindé sur \mathbb{R} , donc A n'est pas diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$ d'après le critère de diagonalisation ;
 - le polynôme caractéristique de A est scindé et à racines simples dans \mathbb{C} (en effet $j \neq j^2$ vu que $j \neq 0$ et $j \neq 1$), donc A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$;
- d'où le résultat.

(2.2) La matrice A étant diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$, nous savons qu'il suffit, pour obtenir un système fondamental de solutions de (S) , de déterminer ses éléments propres. La résolution des systèmes linéaires $AX = jX$, $AX = j^2X$ et $AX = X$, d'inconnue $X \in M_{3,1}(\mathbb{C})$, permet d'obtenir :

$$\ker(A - jI_3) = \text{Vect}_{\mathbb{C}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \right), \quad \ker(A - j^2I_3) = \text{Vect}_{\mathbb{C}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j^4 \end{pmatrix} \right), \quad \ker(A - I_3) = \text{Vect}_{\mathbb{C}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

(on peut simplifier : $j^4 = j^3 \times j = j$, mais ce nous est inutile pour l'instant) donc, si l'on pose :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y_0(t) = e^{jt} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}, \quad Y_1(t) = e^{j^2t} \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j^4 \end{pmatrix}, \quad Y_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

alors (Y_0, Y_1, Y_2) est un système fondamental de solutions de (S) . C'est-à-dire : une application $X : \mathbb{R} \rightarrow M_{3,1}(\mathbb{C})$ de classe C^1 sur \mathbb{R} est solution de (S) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $X = \alpha Y_0 + \beta Y_1 + \gamma Y_2$, si et seulement si :

$$\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \alpha e^{jt} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} + \beta e^{j^2t} \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j^4 \end{pmatrix} + \gamma e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ce qui résout explicitement le système (S) .

(2.3) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une application de classe C^3 sur \mathbb{R} . Posons : $X = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ f'' \end{pmatrix}$. Alors X est de classe

C^1 sur \mathbb{R} puisque toutes ses composantes le sont, et on a $X' = \begin{pmatrix} f' \\ f'' \\ f^{(3)} \end{pmatrix}$. Par suite :

$$f \text{ vérifie } (E_1) \iff f^{(3)} = f \iff \begin{cases} f' &= f' \\ f'' &= f'' \\ f^{(3)} &= f \end{cases} \iff X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X,$$

donc : f est solution de (E_1) si et seulement si $X = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ f'' \end{pmatrix}$ est solution de (S) . Or nous avons déterminé les solutions de (S) dans la question précédente : on en déduit que f est solution de (E_1) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ f''(t) \end{pmatrix} = \alpha e^{jt} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} + \beta e^{j^2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j^4 \end{pmatrix} + \gamma e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que (en identifiant coefficient par coefficient) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f(t) &= \alpha e^{jt} + \beta e^{j^2 t} + \gamma e^t \\ f'(t) &= \alpha j e^{jt} + \beta j^2 e^{j^2 t} + \gamma e^t \\ f''(t) &= \alpha j^2 e^{jt} + \beta j^4 e^{j^2 t} + \gamma e^t \end{cases}$$

Les deux dernières égalités sont conséquence de la première. Donc, en conclusion :

$$f \text{ est solution de } (E_1) \iff \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \alpha e^{jt} + \beta e^{j^2 t} + \gamma e^t,$$

et l'on retrouve bien la description des solutions donnée dans la question **1.3**.

3.

(3.1) Nous allons utiliser la règle de D'Alembert : soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$, alors la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ converge trivialement, et sa somme égale 1. Si $x \neq 0$, alors pour tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{\left| \frac{x^{3(n+1)}}{(3(n+1))!} \right|}{\left| \frac{x^{3n}}{(3n)!} \right|} = \frac{|x|^{3n+3} (3n)!}{|x|^{3n} (3n+3)!} = \frac{|x|^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|x|^3}{27n^3},$$

or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^3}{27n^3} = 0$. On en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{x^{3(n+1)}}{(3(n+1))!} \right|}{\left| \frac{x^{3n}}{(3n)!} \right|} = 0 < 1.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ converge (absolument). On en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc le rayon de convergence demandé est $+\infty$.

(3.2) L'application φ est une somme de série entière définie sur \mathbb{R} , donc elle est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

(3.3) Une somme de série entière est dérivable terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (3n) \frac{x^{3n-1}}{(3n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}, \quad (1)$$

le terme correspondant à $n = 0$ étant de dérivée nulle, puis :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (3n-1) \frac{x^{3n-2}}{(3n-1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!},$$

et enfin :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi^{(3)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (3n-2) \frac{x^{3n-3}}{(3n-2)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-3}}{(3n-3)!} \stackrel{[n'=n-1]}{=} \sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{x^{3n'}}{(3n')!},$$

c'est-à-dire : $\varphi^{(3)} = \varphi$.

Pour obtenir $\varphi^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on observe que cela dépend de la congruence de k modulo 3 : partant de l'égalité $\varphi^{(3)} = \varphi$, une récurrence immédiate permet d'obtenir : $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(3\ell)} = \varphi$. Donc $\varphi^{(k)} = \varphi$ si k est un multiple de 3.

Si $k \equiv 1 \pmod{3}$, alors il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que : $k = 3\ell + 1$. En dérivant l'égalité $\varphi^{(3\ell)} = \varphi$ établie à l'instant, on obtient :

$$\varphi^{(k)} = \varphi^{(3\ell+1)} = \left(\varphi^{(3\ell)}\right)' = \varphi',$$

et de même on obtient $\varphi^{(k)} = \varphi''$ dans le cas où k est congru à 2 modulo 3. En résumé :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi^{(k)}(x) = \begin{cases} \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} & \text{si } k \equiv 0 \pmod{3}, \\ \varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} & \text{si } k \equiv 1 \pmod{3}, \\ \varphi''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} & \text{si } k \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

(3.4) D'après la question précédente, on a : $\varphi^{(3)} = \varphi$. On en déduit que φ est solution de (E_1) ; d'après la question 1.3 ou 2.3, il existe donc $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \alpha e^{ix} + \beta e^{i^2x} + \gamma e^x.$$

Déterminons les scalaires présents grâce aux valeurs de φ , φ' et φ'' en 0. En dérivant l'égalité ci-dessus, et en l'évaluant en 0, on a :

$$\begin{cases} \varphi(0) &= \alpha + \beta + \gamma \\ \varphi'(0) &= \alpha j + \beta j^2 + \gamma \\ \varphi''(0) &= \alpha j^2 + \beta j + \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi(0) &= \alpha + \beta + \gamma, \\ \varphi'(0) &= \alpha j + \beta j^2 + \gamma, \\ \varphi''(0) &= \alpha j^2 + \beta j + \gamma, \end{cases} \quad (2)$$

puisque : $j^4 = j^3 \times j = j$. Mais on a aussi, en examinant les termes constants des développements en série entière en 0 de φ , φ' et φ'' que nous avons explicités dans la question précédente :

$$\begin{cases} \varphi(0) &= 1, \\ \varphi'(0) &= 0, \\ \varphi''(0) &= 0. \end{cases} \quad (3)$$

En combinant (??) et (??), nous obtenons :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma &= 1, \\ \alpha j + \beta j^2 + \gamma &= 0, \\ \alpha j^2 + \beta j + \gamma &= 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire : (γ, α, β) est solution du système résolu dans la question de cours **2.3**. On en déduit : $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$, et donc, en utilisant le fait que $j^2 = \bar{j}$ (admis provisoirement) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{e^x + e^{jx} + e^{j^2x}}{3} = \frac{e^x + e^{jx} + e^{\bar{j}x}}{3} = \frac{e^x + e^{jx} + \overline{e^{jx}}}{3} = \frac{e^x + 2\operatorname{Re}(e^{jx})}{3},$$

et grâce à la forme algébrique de j , on trouve : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Re}(e^{jx}) = e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{3} \left(e^x + 2e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right), \quad (4)$$

d'où le résultat.

Voici une démonstration parmi d'autres de l'égalité $j^2 = \bar{j}$: on a $|j|^2 = j \cdot \bar{j} = 1$ d'après la question **2.1** de cours, mais on a aussi $j^3 = 1$ comme on l'a déjà vu, donc : $j^3 = j \cdot \bar{j}$, puis : $j^2 = \bar{j}$, après division par $j \neq 0$.

(3.5) Faisons le changement d'indice de sommation $n' = n - 1$ dans (??). On obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = \sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{x^{3(n'+1)-1}}{(3(n'+1)-1)!} = \sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{x^{3n'+2}}{(3n'+2)!} = \psi(x).$$

Pour répondre à la question de l'énoncé, il suffit donc d'écrire φ' explicitement à l'aide de fonctions usuelles à valeurs réelles. En dérivant l'identité (??), on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{3} \left(e^x + 2 \left(-\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - e^{-\frac{x}{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right) \right),$$

donc finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \frac{1}{3} \left(e^x - e^{-\frac{x}{2}} \left(\cos \left(\frac{\sqrt{3}x}{2} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\frac{\sqrt{3}x}{2} \right) \right) \right).$$

(3.6) Il s'agit ici de remarquer que θ est la partie paire de φ . En effet :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) + \varphi(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n} + (-x)^{3n}}{(3n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n} + (-1)^{3n} x^{3n}}{(3n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^{3n}}{(3n)!} x^{3n},$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $(-1)^{3n} = ((-1)^3)^n = (-1)^n$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 + (-1)^{3n} = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit que dans la somme ci-dessus, tous les termes d'indices impairs sont nuls, et on ne somme que sur des indices n pairs ; si on les écrit $n = 2\ell$ avec $\ell \in \mathbb{N}$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) + \varphi(-x) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{2}{(6\ell)!} x^{6\ell} = 2\theta(x).$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \theta(x) = \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2} = \frac{1}{3} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \left(e^{-\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}} \right) \cos \left(\frac{\sqrt{3}x}{2} \right) \right),$$

ou encore : $\forall x \in \mathbb{R}, \theta(x) = \frac{1}{3} \left(\cosh(x) + \cosh\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right)$, d'où le résultat.

PARTIE III

1.

(1.1) Il s'écrit : $Y' = A_\alpha Y$, via une réduction très classique.

(1.2) Soit $y \in \mathcal{S}_\alpha$. Montrons que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ on a $y^{(n)} \in C^\ell(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, par récurrence sur ℓ .

Comme y est de classe C^n sur \mathbb{R} par définition de \mathcal{S}_α , en particulier $y^{(n)}$ est de classe C^0 sur \mathbb{R} , donc la propriété voulue est vraie pour $\ell = 0$.

À présent, soit $\ell \in \mathbb{N}$, et supposons que $y^{(n)} \in C^\ell(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. Montrons que $y^{(n)} \in C^{\ell+1}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. Par définition de \mathcal{S}_α , on a :

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}.$$

Or $y^{(n)}$ est de classe C^ℓ sur \mathbb{R} par hypothèse de récurrence, donc y est de classe $C^{\ell+n}$ sur \mathbb{R} , et on en déduit que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ l'application $y^{(k)}$ est de classe $C^{\ell+n-k}$ sur \mathbb{R} . En

particulier, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $n-k \geq 1$, donc $y^{(k)}$ est en particulier de classe $C^{\ell+1}$ sur \mathbb{R} . On en déduit que $y^{(n)}$ s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions de classe $C^{\ell+1}$ sur \mathbb{R} , donc est elle-même de classe $C^{\ell+1}$ sur \mathbb{R} ; d'où la proposition au rang $\ell + 1$.

On a démontré par récurrence que $y^{(n)}$ est de classe C^ℓ sur \mathbb{R} pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, ce qui signifie que $y^{(n)}$ est de classe C^∞ . Il en est donc de même de y , d'où le résultat.

(1.3) Nous proposons une approche inutilement complexe en apparence, mais qui a l'avantage d'anticiper sur la question suivante. L'application :

$$\Phi : \begin{cases} C^\infty(\mathbb{R}, M_{n,1}(\mathbb{K})) & \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \\ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} & \mapsto x_0 \end{cases}$$

est clairement linéaire, donc elle transforme sous-espaces vectoriels (de $C^\infty(\mathbb{R}, M_{n,1}(\mathbb{K}))$) en sous-espaces vectoriels (de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$). Montrons que si l'on appelle \mathcal{H} l'espace vectoriel des solutions du système matriciel : $X' = A_\alpha X$, alors : $\Phi(\mathcal{H}) = \mathcal{S}_\alpha$.

L'inclusion : $\mathcal{S}_\alpha \subseteq \Phi(\mathcal{H})$ est une traduction du fait que si $y \in \mathcal{S}_\alpha$, alors $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$

est solution de $X' = AX$. Nous l'avons établi dans la question **1.1**. Pour montrer l'inclusion

réciproque, nous devons démontrer que pour tout $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ (ici x_0, \dots, x_{n-1} sont

des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{K} de classe C^∞), on a $\Phi(X) = x_0 \in \mathcal{S}_\alpha$. Pour cela, on note que si $X \in \mathcal{H}$ alors $X' = A_\alpha X$ et donc, en identifiant les coefficients dans chaque membre de l'égalité $X' = A_\alpha X$:

$$\begin{cases} x'_0 & = x_1 \\ x'_1 & = x_2 \\ & \vdots \\ x'_{n-2} & = x_{n-1} \\ x'_{n-1} & = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_k \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & = x'_0 \\ x_2 & = x'_1 = x''_0 \\ & \vdots \\ x_{n-1} & = x'_{n-2} = x''_{n-3} = \dots = x_0^{(n-1)} \\ x'_{n-1} & = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_0^{(k)} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & = x'_0 \\ x_2 & = x''_0 \\ & \vdots \\ x_{n-1} & = x_0^{(n-1)} \\ x_0^{(n)} & = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_0^{(k)} \end{cases}$$

ce qui démontre que x_0 est solution de l'équation (E_α) , c'est-à-dire : $x_0 \in \mathcal{S}_\alpha$. C'est ce qu'on voulait démontrer.

En résumé : $\Phi(\mathcal{H}) = \mathcal{S}_\alpha$, or Φ est linéaire et \mathcal{H} est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, M_{n,1}(\mathbb{K}))$, donc \mathcal{S}_α est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

- (1.4) D'après la question précédente, la restriction de l'application Φ à \mathcal{H} définit une application surjective de \mathcal{H} dans \mathcal{S}_α , où \mathcal{H} est l'espace vectoriel des solutions du système différentiel

$$X' = AX. \text{ Cette même restriction est injective : si } X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \text{ vérifie } \Phi(X) = 0,$$

alors $x_0 = 0$ d'après la définition de Φ , et d'après la question précédente les x_i , pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, sont les dérivées successives de x_0 , donc l'égalité $x_0 = 0$ implique :

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad x_i = x_0^{(i)} = 0,$$

c'est-à-dire : $X = 0$.

On en déduit que Φ induit un isomorphisme de \mathcal{H} dans \mathcal{S}_α . Un isomorphisme conserve les dimensions, donc : $\dim(\mathcal{S}_\alpha) = \dim(\mathcal{H})$. Mais d'après le théorème de Cauchy linéaire, l'application $Y \mapsto Y(0)$ définit un isomorphisme de \mathbb{C} -espaces vectoriels entre \mathcal{H} et $M_{n,1}(\mathbb{C})$, donc : $\dim(\mathcal{H}) = \dim(M_{n,1}(\mathbb{C})) = n$. On en déduit :

$$\dim(\mathcal{S}_\alpha) = n.$$

Remarque. Dans la question précédente, nous montrons implicitement que l'application réciproque de Φ est :

$$y \mapsto \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}. \text{ On démontre ainsi directement que } \Phi \text{ est bijective.}$$

2. Dans ce cas, l'équation (E_α) est simplement : $y^{(n)} = y$.
3. Soit $r \in \mathbb{C}$. Alors l'application $x \mapsto e^{rx}$ est clairement de classe C^∞ sur \mathbb{R} , et sa n -ième dérivée est : $x \mapsto r^n e^{rx}$. On en déduit qu'elle appartient à \mathcal{S}_α si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad r^n e^{rx} = e^{rx},$$

c'est-à-dire si et seulement si $r^n = 1$. On en déduit que les nombres complexes r pour lesquels la fonction $x \mapsto e^{rx}$ appartient à \mathcal{S}_α sont les racines n -ièmes de l'unité :

$$r \in \left\{ e^{\frac{2i\pi k}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$$

4. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, posons : $r_k = e^{\frac{2i\pi k}{n}}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \psi_k(x) = e^{r_k x}$.

D'après la question précédente, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ l'application ψ_k est une solution de (E_α) , c'est-à-dire : $\psi_k \in \mathcal{S}_\alpha$. De plus, d'après la question 3.2 de la partie I, la famille $(\psi_k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ est libre. Ainsi il s'agit d'une famille de n fonctions dans \mathcal{S}_α , linéairement indépendantes, et d'après la question 1.4 on a $\dim(\mathcal{S}_\alpha) = n$: on en déduit qu'il s'agit d'une famille libre de cardinal maximal, c'est donc une base de \mathcal{S}_α .

5.

(5.1) La linéarité de d est évidente : on sait que la dérivation est une opération linéaire. Il s'agit de prouver qu'elle définit un endomorphisme de \mathcal{S}_α ; montrons donc que pour tout $y \in \mathcal{S}_\alpha$, on a $d(y) \in \mathcal{S}_\alpha$. Mais il suffit de faire cette vérification sur une base de \mathcal{S}_α , et on en connaît une grâce à la question précédente : en reprenant les notations de la question précédente, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ on a $d(\psi_k) = \psi'_k = r_k \psi_k \in \mathcal{S}_\alpha$ car $\psi_k \in \mathcal{S}_\alpha$ et \mathcal{S}_α est un espace vectoriel (donc est stable par multiplication externe).

Puisque l'image par d de toute fonction d'une base de \mathcal{S}_α est dans \mathcal{S}_α , on en déduit par linéarité que \mathcal{S}_α est stable par d , donc d définit un endomorphisme de cet espace vectoriel.

(5.2) Toujours avec les notations de la question 4, La matrice de d relativement à la base $(\psi_k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ est immédiatement :

$$\begin{pmatrix} r_0 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & r_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On en déduit : $\det(d) = \prod_{i=0}^{n-1} r_i \neq 0$ (en effet une racine de l'unité est nécessairement non nulle).

Par conséquent d est bijectif.

(5.3) Dans la question précédente, nous avons montré que la matrice de d dans une certaine base de \mathcal{S}_α est diagonale : on en déduit que d est diagonalisable.

PARTIE IV

L'encadré de l'énoncé n'est pas clair sur la question, mais je présume qu'on a ici $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$, de sorte que l'équation différentielle $y^{(2p)} = y$ soit en fait (E_α) , et que \mathcal{S}_α soit l'espace vectoriel des solutions de cette équation différentielle particulière.

1. Il s'agit de démontrer que si f et g sont dans \mathcal{S}_α , alors l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|} (f(t)g(t) + f^{(p)}(t)g^{(p)}(t)) dt$$

converge.

Pour cela, on note que si f et g sont dans \mathcal{S}_α , alors l'application :

$$\varphi_{f,g} : t \mapsto e^{-3|t|} (f(t)g(t) + f^{(p)}(t)g^{(p)}(t))$$

est continue sur \mathbb{R} (vérification facile), donc est intégrable sur tout segment inclus dans \mathbb{R} : les problèmes d'intégrabilité ne se posent qu'au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.

Au voisinage de $+\infty$ on a $e^{-3|t|} = e^{-3t}$ et donc, d'après l'indication de l'énoncé :

$$\varphi_{f,g}(t) = O(e^{-3t} e^t e^t) = O(e^{-t}),$$

or l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge, donc par comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi_{f,g}(t) dt$ converge absolument, donc converge (*a priori* $\varphi_{f,g}$ n'a aucune raison d'être positive, d'où le recours à la convergence absolue).

Au voisinage de $-\infty$ on a $e^{-3|t|} = e^{3t}$ et donc, d'après l'indication de l'énoncé :

$$\varphi_{f,g}(t) = O(e^{3t} e^{-t} e^{-t}) = O(e^t),$$

or l'intégrale $\int_{-\infty}^0 e^t dt$ converge (le changement de variable $u = -t$ permet de démontrer que cette intégrale est de même nature que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$; on peut aussi démontrer la convergence du fait que ses primitives aient une limite finie en $-\infty$), donc par comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \varphi_{f,g}(t) dt$ converge absolument, donc converge.

Puisque les intégrales $\int_{-\infty}^0 \varphi_{f,g}(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} \varphi_{f,g}(t) dt$ convergent, l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{f,g}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|} (f(t)g(t) + f^{(p)}(t)g^{(p)}(t)) dt$$

converge également, donc l'expression $(f | g)$ de l'énoncé a bien un sens.

2. L'application $(f, g) \mapsto (f | g)$ est à valeurs dans \mathbb{R} , linéaire par rapport à chaque variable du fait de la linéarité de la dérivation (p fois) et de l'intégration, symétrique du fait de la commutativité du produit dans \mathbb{R} . Il reste à vérifier qu'il s'agit d'une forme définie positive.

Pour cela, soit $f \in \mathcal{S}_\alpha$. Alors :

$$(f | f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|} ((f(t))^2 + (f^{(p)}(t))^2) dt.$$

L'exponentielle est positive (et non nulle) sur \mathbb{R} , et un carré de nombre réel est positif, donc l'intégrande ci-dessus est positif sur \mathbb{R} . Par croissance de l'intégrale, on en déduit : $(f | f) \geq 0$; d'où la positivité de $(\cdot | \cdot)$. De plus, si $(f | f) = 0$, alors l'application $t \mapsto e^{-3|t|} ((f(t))^2 + (f^{(p)}(t))^2)$ est une application CONTINUE, positive et d'intégrale nulle : ce n'est possible que si elle est identiquement nulle. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{-3|t|} ((f(t))^2 + (f^{(p)}(t))^2) = 0.$$

Après multiplication par $e^{3|t|}$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (f(t))^2 + (f^{(p)}(t))^2 = 0.$$

Comme le carré d'un nombre réel est positif, nous avons là une somme de deux nombres réels positifs dont la somme est nulle; ce n'est possible que s'ils sont tous les deux nuls. En particulier :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = 0,$$

donc $f = 0$: nous avons bien démontré que $(\cdot | \cdot)$ est une forme définie.

En conclusion, l'application $(\cdot | \cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire.

3. Soient $f \in S_1$ et $g \in S_2$. Alors : $f^{(p)} = f$ et $g^{(p)} = -g$. En dérivant p fois ces deux égalités, on obtient : $f^{(2p)} = f^{(p)} = f$, donc $f \in S_\alpha$, et de même : $g^{(2p)} = -g^{(p)} = -(-g) = g$, donc $g \in S_\alpha$. Ceci montre que $(f | g)$ est correctement défini (on a montré en passant que $S_1 \subseteq \mathcal{S}_\alpha$ et $S_2 \subseteq \mathcal{S}_\alpha$). De plus, toujours si $f \in S_1$ et $g \in S_2$:

$$(f | g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|} (f(t)g(t) + f^{(p)}(t)g^{(p)}(t)) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-3|t|} (f(t)g(t) - f(t)g(t))}_{=0} dt = 0.$$

Donc f et g sont orthogonaux pour tous $f \in S_1$ et $g \in S_2$. Ceci démontre que S_1 et S_2 sont orthogonaux. De plus, d'après la question 1.4 de la partie III, on a $\dim(S_1) = \dim(S_2) = p$ et $\dim(S_\alpha) = n = 2p$, donc :

$$\dim(S_1) + \dim(S_2) = 2p = \dim(S_\alpha),$$

ce qui démontre que S_1 et S_2 sont supplémentaires orthogonaux dans \mathcal{S}_α .

4.

- (4.1) Si l'on veut conjecturer le résultat attendu, on peut s'inspirer de ce qui fut trouvé dans la question 3.3 de la partie II.

En tant que somme de série entière, f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , et ses dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme. On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(4)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (4n)(4n-1)(4n-2)(4n-3) \frac{x^{4n-4}}{(4n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!} \stackrel{[n'=n-1]}{=} \sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{x^{4n'}}{(4n')!} = f(x).$$

Si l'on prend $\alpha = (1, 0, 0, 0) \in \mathbb{C}^4$, on a donc $f \in \mathcal{S}_\alpha$.

- (4.2) Notons que la décomposition d'une fonction dans la somme directe $\mathcal{S}_\alpha = S_1 \oplus S_2$ est explicite. En effet, l'application linéaire $s : y \mapsto y^{(p)}$ définit clairement une symétrie de l'espace vectoriel \mathcal{S}_α (pour tout $y \in \mathcal{S}_\alpha$ on a : $s^2(y) = y^{(2p)} = y$, donc $s^2 = \text{Id}$), par rapport à S_1 et parallèlement à S_2 (en effet, $s(y) = y$ si et seulement si $y^{(p)} = y$, et $s(y) = -y$ si et seulement si $y^{(p)} = -y$). Connaissant les différentes propriétés d'une symétrie, on en déduit que pour tout $y \in \mathcal{S}_\alpha$, on a : $y = \frac{1}{2}(y + s(y)) + \frac{1}{2}(y - s(y))$, avec $\frac{1}{2}(y + s(y)) \in S_1$ et $\frac{1}{2}(y - s(y)) \in S_2$; cela nous donne les projetés (orthogonaux) de toute fonction de \mathcal{S}_α sur S_1 et S_2 respectivement.

Plaçons-nous dans le cas particulier $n = 4$ (donc $p = 2$). D'après ce qui précède, le projeté orthogonal de f sur S_1 est $\frac{1}{2}(f + s(f)) = \frac{1}{2}(f + f'')$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) + f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!} \stackrel{[n'=n-1]}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} + \sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{x^{4n'+2}}{(4n'+2)!} = \sum_{\substack{m=0 \\ m \equiv 0 \text{ ou } 2 \pmod{4}}^{+\infty}} \frac{x^m}{m!},$$

et $m \in \mathbb{N}$ est congru à 0 ou 2 modulo 4 si et seulement s'il est pair ; on peut dans ce cas l'écrire $m = 2\ell$ avec $\ell \in \mathbb{N}$. Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(x) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{x^{2\ell}}{(2\ell)!} = \cosh(x).$$

Ainsi le projeté orthogonal de f sur S_1 est $\frac{1}{2}(f + f'') = \frac{1}{2} \cosh$. De même, mais avec un peu plus de flair, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) - f''(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{2n} \frac{x^{2 \cdot 2n}}{(2 \cdot 2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{2n+1} \frac{x^{2 \cdot (2n+1)}}{(2 \cdot (2n+1))!} \\ &= \sum_{\substack{m=0 \\ m \text{ pair}}}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \sum_{\substack{m=0 \\ m \text{ impair}}}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \\ &= \cos(x), \end{aligned}$$

donc le projeté orthogonal de f sur S_2 est $\frac{1}{2}(f - f'') = \frac{1}{2} \cos$.

(4.3) On a :

$$f = \frac{1}{2}(f + f'') + \frac{1}{2}(f - f'') = \frac{1}{2}(\cosh + \cos).$$