# Correction DL 05 2TSI

**Exercice 1**
**On considère la fonction $2\pi-$périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur $[-\pi, \pi]$ par**

$$\forall t \in [-\pi, \pi], f(t) = \pi^2 t - t^3.$$

## Partie A

**Pour $k$ entier naturel impair et $n$ entier naturel non nul, on considère les intégrales**

$$I_{k,n} = \int_0^\pi t^k \sin(nt)\mathrm{d}t$$

1. **Calculer** $I_{1,n}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
   $I_{1,n} = \int_0^\pi t \sin(nt)\mathrm{d}t$
   Les fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -\frac{1}{n}\cos(nt)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.
   $u(t) = t$ $\qquad u'(t) = 1$
   $v(t) = -\frac{1}{n}\cos(nt)$ $\qquad v'(t) = \sin(nt)$
   Par intégration par parties,
   $$\int_0^\pi uv'(t)\mathrm{d}t = [uv(t)]_0^\pi - \int_0^\pi u'v(t)\mathrm{d}t$$
   ie
   $I_{1,n} = \left[-\dfrac{1}{n}t\cos(nt)\right]_0^\pi - \displaystyle\int_0^\pi \left(-\frac{1}{n}\right)\cos(nt)(t)\mathrm{d}t$
   d'où
   $I_{1,n} = \left[-\dfrac{1}{n}t\cos(nt) + \dfrac{1}{n^2}\sin(nt)\right]_0^\pi$
   $I_{1,n} = \left(-\dfrac{1}{n}\pi\cos(n\pi) + \dfrac{1}{n^2}\sin(n\pi)\right) - \left(-\dfrac{1}{n}0\cos(n0) + \dfrac{1}{n^2}\sin(n0)\right)$
   $I_{1,n} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\pi$

2. **Montrer que pour** $k \geq 3, I_{k,n} = \dfrac{\pi^k(-1)^{n+1}}{n} - \dfrac{k(k-1)}{n^2}I_{k-2,n}$.
   Soit $k \geq 3$,
   Les fonctions $u : t \mapsto t^k$ et $v : t \mapsto -\frac{1}{n}\cos(nt)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.
   $u(t) = t^k$ $\qquad u'(t) = kt^{k-1}$
   $v(t) = -\frac{1}{n}\cos(nt)$ $\qquad v'(t) = \sin(nt)$
   Par intégration par parties,
   $$\int_0^\pi uv'(t)\mathrm{d}t = [uv(t)]_0^\pi - \int_0^\pi u'v(t)\mathrm{d}t$$
   ie $I_{k,n} = \left[-\dfrac{1}{n}t^k\cos(nt)\right]_0^\pi - \displaystyle\int_0^\pi -\frac{k}{n}t^{k-1}\cos(nt)\mathrm{d}t$
   Les fonctions $u : t \mapsto t^{k-1}$ et $v : t \mapsto -\frac{1}{n}\sin(nt)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

$u(t) = t^{k-1}$ $\qquad u'(t) = (k-1)t^{k-2}$

$v(t) = \frac{1}{n}\sin(nt)$ $\qquad v'(t) = \cos(nt)$

Par intégration par parties,

$$I_{k,n} = \left[-\frac{1}{n}t^k\cos(nt)\right]_0^\pi + \frac{k}{n}\left(\left[\frac{1}{n}t^{k-1}\sin(nt)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{k-1}{n}t^{k-2}\sin(nt)\mathrm{d}t\right)$$

donc

$$I_{k,n} = \left[-\frac{1}{n}t^k\cos(nt) + \frac{k}{n}\left(\frac{1}{n}t^{k-1}\sin(nt)\right)\right]_0^\pi - \frac{k(k-1)}{n^2}\int_0^\pi t^{k-2}\sin(nt)\mathrm{d}t$$

$$I_{k,n} = \left(-\frac{1}{n}\pi^k\cos(n\pi) + \frac{k}{n}\left(\frac{1}{n}\pi^{k-1}\sin(n\pi)\right)\right) - \left(-\frac{1}{n}0^k\cos(n0) + \frac{k}{n}\left(\frac{1}{n}0^{k-1}\sin(n0)\right)\right) - \frac{k(k-1)}{n^2}I_{k-2,n}$$

Donc

$$I_{k,n} = \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\pi^k + 0\right) - (0) - \frac{k(k-1)}{n^2}I_{k-2,n}$$

Enfin

$$I_{k,n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\pi^k - \frac{k(k-1)}{n^2}I_{k-2,n}$$

3. **En déduire que** $I_{3,n} = \dfrac{\pi^3(-1)^{n+1}}{n} + \dfrac{6\pi(-1)^n}{n^3}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{3,n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\pi^3 - \frac{3(3-1)}{n^2}I_{1,n}$$

$$I_{3,n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\pi^3 - \frac{6}{n^2}\times\frac{(-1)^{n+1}}{n}\pi$$

Enfin

$$I_{3,n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\pi^3 + \frac{6}{n^2}\times\frac{(-1)^{n}}{n}\pi$$

On en déduit donc que

$$I_{3,n} = \frac{\pi^3(-1)^{n+1}}{n} + \frac{6\pi(-1)^n}{n^3}.$$

4. **En utilisant ce qui précède, montrer que** $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \frac{6\pi(-1)^{n+1}}{n^3}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \int_0^\pi (\pi^2 t - t^3)\sin(nt)\mathrm{d}t = \pi^2\int_0^\pi t\sin(nt)\mathrm{d}t - \int_0^\pi t^3\sin(nt)\mathrm{d}t$. ie

$\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \pi^2 I_{1,n} - I_{3,n}$.

donc

$$\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \pi^2\times\frac{(-1)^{n+1}}{n}\pi - \left(\frac{\pi^3(-1)^{n+1}}{n} + \frac{6\pi(-1)^n}{n^3}\right)$$

$$\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\pi^3 - \frac{\pi^3(-1)^{n+1}}{n} - \frac{6\pi(-1)^n}{n^3}$$

Conclusion:

$$\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \frac{6\pi(-1)^{n+1}}{n^3}$$

---

## Partie B

1. **Étudier la parité de la fonction $f$.**

   - $D_f = \mathbb{R}$ est centré en 0.
   - $\forall t \in [-\pi, \pi]$,
     $f(-t) = \pi^2(-t) - (-t)^3 = -\pi^2 t + t^3 = -f(t)$.
     Enfin, $\forall t \in \mathbb{R}$,
     il existe $t_0 \in [-\pi, \pi]$ et $k \in \mathbb{Z}$, tels que $t = (2\pi)k + t_0$
     $f(-t) = f(-t_0 - (2\pi)k) = f(-t_0) = -f(t_0) = -f(t_0 + (2\pi)k) = -f(t)$.

   Donc $f$ est impaire.

2. **Étudier les variations de $f$ sur le segment $[-\pi, \pi]$.**
   $f$ est dérivable sur $[-\pi, \pi]$
   $\forall t \in [-\pi, \pi]$,
   $f'(t) = \pi^2 - 3t^2 = 3\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - t\right)\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + t\right)$.
   d'où le tableau suivant:

| $t$ | $-\pi$ | | $-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ | | $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f'(t)$ | | - | 0 | + | 0 | - | |
| variations de $f$ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | |

3. **La fonction $f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$ ? Justifier**.
   $f$ est continue sur $[-\pi, \pi]$,
   par périodicité, elle est donc continue en tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
   De plus
   $\lim\limits_{t \to \pi^-} f(t) = \lim\limits_{t \to \pi^-} \pi^2 t - t^3 = 0$
   Alors que
   $\lim\limits_{t \to \pi^+} f(t) = \lim\limits_{t \to -\pi^+} f(t) = \lim\limits_{t \to -\pi^+} \pi^2 t - t^3 = 0$ (par périodicité)
   donc, $f$ est continue en $\pi$ et, par périodicité, en tout $t \in \{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
   Conclusion: $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

4. **On note**

$$Sf(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$$

   **la série de Fourier de la fonction $f$.**

   (a) **Déterminer les coefficients $a_n$.**
   $f$ est impaire donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = 0$$

(b) **Montrer en utilisant la question A(4) et en précisant les étapes de calculs, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $b_n = 12\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3}$.**

Soit $T = 2\pi$ et $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(\omega n t)\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$$

or $t \mapsto f(t)\sin(nt)$ est paire, donc

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$

enfin, en utilisant le résultat de la question A(4),

$$b_n = \frac{2}{\pi} \times \frac{6\pi(-1)^{n+1}}{n^3} = \frac{12(-1)^{n+1}}{n^3}$$

5. **Montrer que la série de Fourier $Sf$ converge vers $f$ et préciser le théorème utilisé.**

La fonction $f$ est $2\pi-$ périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de $f$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$, vers $\frac{1}{2}(\lim_{t^-} f + \lim_{t^+} f)$.

De plus $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2}(\lim_{t^-} f + \lim_{t^+} f) = f(t)$, ce qui montre que la série converge vers $f$.

6. **Calculer $Sf(\pi/2)$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$.**

D'après la question suivante la série de Fourier de $f$ converge en $\dfrac{\pi}{2}$ et

$$Sf\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi^2 * \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = \frac{3\pi^3}{8}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\frac{\pi}{2}) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi^3}{8}$$

$$0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^{n+1}}{n^3}\sin(n\frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi^3}{8}$$

ou encore

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2p+1+1}}{(2p+1)^3}(-1)^p = \frac{3\pi^3}{12 \times 8}$$

Enfin

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

7. **Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = \frac{8\pi^7}{105}$**

$$\int_0^{\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \left(\pi^2 t - t^3\right)^2 \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} (\pi^4 t^2 - 2 \times \pi^2 t^4 + t^6)\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = \left[\pi^4\frac{t^3}{3} - 2\pi^2\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7}\right]_0^{\pi}$$

$$\int_0^{\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = \left(\pi^4\frac{\pi^3}{3} - 2\pi^2\frac{\pi^5}{5} + \frac{\pi^7}{7}\right) - 0 = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right)\pi^7 = \frac{5 \times 7 - 2 \times 3 \times 7 + 3 \times 5}{3 \times 5 \times 7}\pi^7 = \frac{8\pi^7}{105}$$

Conclusion:

$$\int_0^{\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = \frac{8\pi^7}{105}$$

8. **En appliquant la relation de Parseval à $f$, montrer que** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$

$f$ est $2\pi-$périodique et continue par morceaux donc, d'après l'inégalité de Parseval, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ convergent et

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\mathrm{d}t$$

ie

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{12(-1)^{n+1}}{n^3}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t$$

or $f^2$ est paire, donc

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{12(-1)^{n+1}}{n^3}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)\mathrm{d}t$$

donc

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{144}{n^6} = \frac{1}{\pi}\times\frac{8\pi^7}{105}$$

Conclusion

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{8\pi^6}{105*72} = \frac{\pi^6}{105*9} = \frac{\pi^6}{945}$$

9. (a) **Soit $n$ entier supérieur ou égal à 2. Montrer que** $\displaystyle\frac{1}{n^6} = \int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^6}\mathrm{d}t \leq \int_{n-1}^{n}\frac{1}{t^6}\mathrm{d}t.$

   Soit $n \geq 2$,
   $\forall t \in [n-1, n], \quad 1 \leq n-1 \leq t \leq n$, donc $0 < t^6 \leq n^6$ donc $\frac{1}{n^6} \leq \frac{1}{t^6}$
   or $t \mapsto \frac{1}{n^6}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^6}$ sont continues sur $[n-1, n]$ donc
   $\displaystyle\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^6}\mathrm{d}t \leq \int_{n-1}^{n}\frac{1}{t^6}\mathrm{d}t$
   enfin $\displaystyle\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^6}\mathrm{d}t = \frac{1}{n^6}\int_{n-1}^{n} 1\mathrm{d}t = \frac{1}{n^6}\times 1$
   Conclusion

$$\frac{1}{n^6} = \int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^6}\mathrm{d}t \leq \int_{n-1}^{n}\frac{1}{t^6}\mathrm{d}t$$

   (b) **Soit $N$ un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que** $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} \leq \frac{1}{5N^5}$**.**

   Soit $N$ un entier supérieur ou égal à 1, alors $N+1 \geq 2$ et
   Soit $\forall P \geq N$, alors $\forall N+1 \leq n \leq P$,

$2 \leq n$, donc $\dfrac{1}{n^6} \leq \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^6}\mathrm{d}t$

alors

$\displaystyle\sum_{n=N+1}^{P} \frac{1}{n^6} \leq \sum_{n=N+1}^{P} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^6}\mathrm{d}t$

donc

$\displaystyle\sum_{n=N+1}^{P} \frac{1}{n^6} \leq \int_{N}^{P} \frac{1}{t^6}\mathrm{d}t$ (par relation de Chasles)

ie

$\displaystyle\sum_{n=N+1}^{P} \frac{1}{n^6} \leq \left[\frac{-1}{5t^5}\right]_N^P = \left(\frac{-1}{5P^5}\right) - \left(\frac{-1}{5N^5}\right)$

$\displaystyle\lim_{P\to+\infty} \frac{-1}{5P^5} = 0$ et $\sum \frac{1}{n^6}$ converge donc on peut écrire

$\displaystyle\lim_{P\to+\infty} \left(\sum_{n=N+1}^{P} \frac{1}{n^6}\right) \leq \lim_{P\to+\infty} \left(\frac{-1}{5P^5}\right) - \left(\frac{-1}{5N^5}\right)$

ie

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} \leq \frac{1}{5N^5}.$$

---

## Partie C

On admettra pour répondre à cette partie d'algorithmique les deux résultats suivants démontrés dans la partie **B** questions (8) et (9)(b):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} \text{ et } \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} \leq \frac{1}{5N^5}.$$

1. **Écrire en métalangage ou en Python, une fonction `fin` prenant comme argument un réel `eps` avec $10^{-10} \leq$ `eps` $\leq 1$, et renvoyant le plus petit entier naturel non nul `N` tel que $\frac{1}{5N^5} \leq$ `eps`.**

   **Fonction en métalangage**

   **fonction fin**(eps)
   $N \leftarrow 1$
   **tant que** $1/N^5 > eps$ **faire**
   | $N \leftarrow N+1$
   **fin**
   **retourner** $N$

   **Fonction en Scilab**

```
function N=fin(eps)
    N=1
    while (1/N^5)>eps do
        N=N+1
    end
endfunction
```

2. **Écrire en métalangage ou en Scilab, une fonction `somme` prenant comme argument un réel `N` strictement positif et renvoyant une approximation décimale de $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^6}$.**

   **Fonction en métalangage**

   **fonction somme**(N)
   S=0
   **pour** *k allant de 1 à N* **faire**
   | $S \leftarrow S + 1/k^6$
   **fin**
   **retourner** $S$

   **Fonction en Scilab**

```
function S=somme(N)
    S=0
    for k=N:-1:1 do
        S=S+1/k^6
    end
endfunction
```

   **Remarque:**

   On part de S=0, puis on incrémente du plus petit nombre au plus grand afin de minimiser les erreurs de calcul.

   C'est une bonne habitude à prendre, mais pas forcément utile avec Scilab.

3. **En utilisant les deux fonctions précédentes, écrire en métalangage ou en Scilab, une fonction `approxPi6` prenant comme argument un réel `eps` strictement positif et renvoyant une approximation de $\pi^6$ à `eps` près.**

   **Fonction en métalangage**

   **fonction approxpi6**(eps)
   N=fin(eps/945)
   **retourner** *945*somme(S)*

   **Fonction en Scilab**

```
function a=approxpi6(eps)
    n=fin(eps/945)
    a=945*somme(n)
endfunction
```

**Remarque:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$$

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^6}+\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$

d'où

$$945\times\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^6}+945\times\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}=\pi^6$$

On cherche donc $N$ tel que

$945\times\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}\leq\frac{1}{5N^5}$ ie $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}\leq\frac{1}{945\times 5N^5}$,

Puis on calcule $945\times\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^6}$

**Exercice 2**

**On considère la fonction $f$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par**

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 - 6x - 6y.$$

**Dans un espace affine euclidien muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère la surface $S$ admettant pour équation cartésienne:**

$$z = f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 - 6x - 6y.$$

1. **Comparer $f(x,y)$ avec $f(y,x)$. En déduire un plan de symétrie de la surface $S$.**
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
   $$f(y,x) = f(x,y)$$
   donc $S$ admet le plan d'équation $y = x$ (ie $x - y = 0$) comme plan de symétrie.

2. **Dans cette question, on cherche à déterminer les points critiques de $f$.**

   (a) **Calculer** $p(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
   $p(x,y) = 3x^2 + 0 + 2xy + y^2 - 6 + 0 = 3x^2 + 2xy + y^2 - 6$

   (b) **Calculer** $q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
   $q(x,y) = 0 + 3y^2 + x^2 + 2xy + 0 - 6 = 3y^2 + x^2 + 2xy - 6$

   (c) **Trouver les couples de réels $(x,y)$ solutions du système d'équations suivant:**
   $$\begin{cases} p(x,y) &= 0 \\ q(x,y) &= 0 \end{cases}$$
   Indication: On pourra considérer l'équation auxiliaire $p(x,y) - q(x,y) = 0$
   $$\begin{cases} p(x,y) &= 0 \\ q(x,y) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} p(x,y) &= 0 \\ p(x,y) - q(x,y) &= 0 \end{cases}$$
   $$\iff \begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 - 6 &= 0 \\ 2x^2 - 2y^2 &= 0 \end{cases}$$
   $$\iff \begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 - 6 &= 0 \\ 3y^2 + x^2 + 2xy - 6 &= 0 \\ (x-y)(x+y) &= 0 \end{cases}$$
   $$\iff \begin{cases} 6x^2 - 6 &= 0 \\ y &= x \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2x^2 - 6 &= 0 \\ y &= -x \end{cases}$$
   $$\iff \begin{cases} x^2 &= 1 \\ y &= x \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2 &= 3 \\ y &= -x \end{cases}$$
   $$\mathcal{S} = \left\{ (1,1); (-1,-1); (\sqrt{3}, -\sqrt{3}); (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \right\}$$

   (d) **En déduire que la fonction $f$ admet quatre points critiques dont on précisera les coordonnées.**
   $f$ admet un point critique en $(x,y)$ ssi $\nabla f(x,y) = 0$
   Donc $f$ admet quatre points critiques de coordonnées $(1,1); (-1,-1); (\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ et $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

   (e) **A l'aide d'un théorème bien choisi, que vous énoncerez et dont vous vérifierez les hypothèses dans ce cas, montrer que** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$
   $f$ est une fonction polynômiale en $x$ et $y$ donc $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, par conséquent, d'après le théorème de Schwarz,
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

3. **Dans cette question, on détermine de quels types sont les points critiques.**

   (a) **Calculer** $r(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$
   $r(x,y) = \frac{\partial p}{\partial x}(x,y) = 6x + 2y$

   (b) **Calculer** $s(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$
   $s(x,y) = \frac{\partial p}{\partial y}(x,y) = 2x + 2y$

   (c) **Calculer** $t(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$
   $t(x,y) = \frac{\partial q}{\partial y}(x,y) = 6y + 2x$

   (d) **Calculer** $r, s, t$ **et** $rt - s^2$ **pour** $(x,y)$ **valant** $(1,1), (-1,-1), (\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ **et** $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$**. En déduire la nature des points critiques (maximum, minimum ou col) trouvés à la question (2d). Pour cela recopier et compléter le tableau récapitulatif suivant.**

| | $(1,1)$ | $(-1,-1)$ | $(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ | $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ |
|---|---|---|---|---|
| $r$ | $8>0$ | $-8<0$ | $4\sqrt{3}$ | $-4\sqrt{3}$ |
| $s$ | $4$ | $-4$ | $0$ | $0$ |
| $t$ | $8$ | $-8$ | $-4\sqrt{3}$ | $4\sqrt{3}$ |
| $rt-s^2$ | $48>0$ | $48>0$ | $-48<0$ | $-48<0$ |
| Nature | Minimum local | Maximum local | col (point selle) | col |

4. **Dans cette partie, on cherche à déterminer les points du plan tels que** $f(x,y) = 0$.

   (a) **Déterminer trois réels** $a, b, c$ **tels que pour tout** $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 - 6x - 6y = (x+y)(x^2 + y^2 + axy + bx + cy - 6).$$

   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
   $(x+y)(x^2+y^2+axy+bx+cy-6) = x^3+xy^2+ax^2y+bx^2+cxy-6x+x^2y+y^3+axy^2+bxy+cy^2-6y = x^3+y^3+(a+1)x^2y+(a+1)xy^2+bx^2+(b+c)xy-6x+cy^2-6y$
   par identification des coefficients
   $\begin{cases} a+1 = & 1 \\ b = & 0 \\ c = & 0 \end{cases}$
   donc $a = b = c = 0$
   et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
   $f(x,y) = (x+y)(x^2+y^2-6)$

   (b) **En déduire que l'ensemble de points vérifiant l'équation** $f(x,y) = 0$ **est formé d'une droite et d'un cercle. On donnera une équation de la droite et une équation du cercle, son centre, son rayon puis les coordonnées de l'intersection de la droite et du cercle.**
   $f(x,y) = 0$ ssi $(x+y)(x^2+y^2-6) = 0$ ssi $x+y = 0$ ou $x^2+y^2-6 = 0$
   Donc l'ensemble de points vérifiant l'équation $f(x,y) = 0$ est formé de la réunion de la droite $D$ d'équation $y = -x$ et du cercle $C$ d'équation $x^2+y^2 = 6$.
   Le cercle a pour centre $O(0,0)$ et pour rayon $\sqrt{6}$.

$$M(x,y) \in D \cap C \iff \begin{cases} y = -x \\ x^2+y^2 = 6 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = -x \\ 2y^2 = 6 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = -y = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -y = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

   La droite et le cercle se coupent donc en $A(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ et $B(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$.

(c) **Faire sur votre copie une figure donnant dans un repère la droite et le cercle précédents ainsi que les points critiques trouvés à la question (2d). (Une figure à main levée aussi claire que possible sera acceptée).**