# Devoir surveillé 04

*2TSI. Mathématiques*

**Samedi 08 février 2020**

**Les exercices sont indépendants. Durée 4 heures**

## Exercice 01

Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$ la base canonique de $E$.
On considère l'endomorphisme $f$ de $E$ dont la matrice dans $\mathcal{B}_0$ est :

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & -2 \\ -4 & b & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix},$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note $Id$ l'application identité de $E$.

1. (a) Montrer qu'il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P_1 = 1 + X + X^2$ soit un vecteur propre de $f$. Quelle est alors la valeur propre de $f$ associée au vecteur propre $P_1$ ?

   (b) On suppose que $(a, b) = (4, 1)$.
   Vérifier que $-1$ est une valeur propre de $f$. Déterminer $\operatorname{Ker}(f + Id)$.

   Pour la suite de l'exercice, **on pose** $a = 4$ **et** $b = 1$.
2. Montrer que $f$ est diagonalisable et déterminer une base $\mathcal{B}'$ de $E$ formée de vecteurs propres de $f$.
3. On considère l'application $\phi$ définie sur $E \times E$ par :

$$\phi : E \times E \to \mathbb{R},\ (p_0 + p_1X + p_2X^2, q_0 + q_1X + q_2X^2) \mapsto p_0q_0 + p_1q_1 + 2p_2q_2.$$

   Montrer que $\phi$ définit un produit scalaire sur $E$.
4. (a) Pour tout $\lambda$ réel appartenant au spectre de $f$, on note $E_\lambda$ le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda$.
   On sait que $-1$ est une valeur propre de $f$.
   Montrer qu'il existe une valeur propre $\mu$ de $f$ telle que $E_{-1}$ et $E_\mu$ sont orthogonaux pour le produit scalaire $\phi$. Déterminer $\mu$.

   (b) La base $\mathcal{B}'$ de la question **Q2** est-elle orthogonale pour le produit scalaire $\phi$ ?
5. Soit la famille de vecteurs $\mathcal{C} = (1 + X + X^2, 2X - X^2, 1 + X^2)$.

   (a) Montrer que $\mathcal{C}$ forme une base de $E$.

   (b) En utilisant une méthode similaire à l'algorithme de Gram-Schmidt, déterminer une famille de vecteurs $(Q_1, Q_2, Q_3)$, orthogonale pour le produit scalaire $\phi$, vérifiant les conditions suivantes :

   - $\operatorname{Vect}(Q_1) = \operatorname{Vect}(1 + X + X^2)$,
   - $\operatorname{Vect}(Q_1, Q_2) = \operatorname{Vect}(1 + X + X^2, 2X - X^2)$,
   - $(Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de $E$.

   (c) Déterminer les normes des vecteurs $Q_1$, $Q_2$ et $Q_3$ pour le produit scalaire $\phi$.

**T.S.V.P** $\rightarrow$

6. (a) Soit $P \in E$, on note $(\alpha, \beta, \gamma)$ les coordonnées de $P$ dans la base $(Q_1, Q_2, Q_3)$ déterminée précédemment.
   Montrer que les réels $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ peuvent être déterminés à l'aide des produits scalaires de $P$ et des vecteurs $Q_i$.
   (b) Montrer que les sous-espaces $F = \text{Vect}(Q_1)$ et $G = \text{Vect}(Q_2, Q_3)$ sont supplémentaires dans $E$.
   (c) Rappeler la définition de la projection vectorielle sur $F$ parallèlement à $G$.
   Déterminer la matrice de cet endomorphisme dans la base canonique de $E$.

## Exercice 02

On décide de simuler des tirages répétés avec remise à l'aide d'un programme informatique. Ce programme détermine aléatoirement un entier $n \in \mathbb{N}^\star$, puis génère une liste de $n$ valeurs, elles aussi choisies aléatoirement parmi les nombres 0 et 1. Les choix des $n$ valeurs sont indépendants et à chaque étape de génération d'un élément de la liste, la probabilité d'obtenir 1 est égale à $\lambda$ avec $\lambda \in ]0, 1[$.

On note :
- $L_n$ l'événement : « on a généré une liste de $n$ valeurs ».
- $S_k$ l'événement : « la liste obtenue contient exactement $k$ fois la valeur 1 ».
- $T_k$ l'événement : « la liste obtenue contient au moins $k$ valeurs ».

1. Soient $p \in ]0, 1[$ et $a \in \mathbb{R}_+^\star$.
   On suppose que la probabilité d'obtenir la valeur $n$ est égale à $a \times p^n$.
   Rappeler la valeur de la somme de la série numérique convergente $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^\star} P(X = n)$.
   En déduire la valeur de $a$.
2. Déterminer la probabilité de l'événement $T_k$ pour $k \in \mathbb{N}^\star$.
3. (a) Justifier que la probabilité $P_{L_j}(S_k)$ (probabilité de $S_k$ sachant $L_j$)) pour $k \in \mathbb{N}^\star$ et $j \in \mathbb{N}^\star$ tel que $j \geqslant k$, vaut :
$$P_{L_j}(S_k) = \binom{j}{k} \lambda^k (1-\lambda)^{j-k}.$$
   (b) En déduire que la probabilité d'obtenir exactement $k$ fois la valeur 1 dans une liste générée contenant au moins $k$ valeurs est égale à :
$$P(S_k \cap T_k) = \frac{a}{k!}(\lambda p)^k \sum_{j=k}^{+\infty} j(j-1)...(j-k+1)((1-\lambda)p)^{j-k}.$$
4. (a) Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, rappeler l'expression de son développement en série entière au voisinage de 0 et la valeur du rayon de convergence de la série obtenue.
   (b) Démontrer par réccurence que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,
$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$
   Énoncer le théorème de dérivation d'une série entière sur son intervalle de convergence.
   Calculer $P(S_k \cap T_k)$ en fonction de $f^{(k)}((1-\lambda)p)$ et en déduire la probabilité de l'événement $S_k$ sachant $T_k$.