Corrigé DS TSI2 08/02/2020

Exercice 1.

1. (a) Le vecteur coordonnées de P_1 dans $\mathcal{B}_0$ est $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Et :

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-3\\b\\1\end{pmatrix}.$$

Donc : P_1 est vecteur propre de f si et seulement s'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{pmatrix}a-3\\b\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\iff\begin{cases}\lambda=1\\b=1\\a=4\end{cases}$$

Finalement, l'unique couple (a,b) tel que P_1 est vecteur propre de f est le couple $(4,1)$, associé à la valeur propre 1.

(b) On a :

$$A+I_3=\begin{pmatrix}5&-1&-2\\-4&2&4\\5&-1&-2\end{pmatrix}.$$

Les deux premières colonnes de $A+I_3$ forment une famille libre et les deux dernières une famille liée donc $\mathrm{rg}(A+I_3)=2\neq 3$ et -1 est bien valeur propre de f. Par ailleurs,

$$\ker(A+I_3)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\right)$$

donc :

$$\ker(f+Id)=\mathrm{Vect}\left(2X-X^2\right).$$

2. $A=\begin{pmatrix}4&-1&-2\\-4&1&4\\5&-1&-3\end{pmatrix}$ donc : $\chi_A(X)=\det(XI_3-A)=\begin{vmatrix}X-4&1&2\\4&X-1&-4\\-5&1&X+3\end{vmatrix}$. On somme les trois premières colonnes et on factorise par $X-1$:

$$\chi_A(X)=(X-1)\begin{vmatrix}1&1&2\\1&X-1&-4\\1&1&X+3\end{vmatrix}=(X-1)\begin{vmatrix}1&1&2\\0&X-2&-6\\0&0&X+1\end{vmatrix}=(X-1)(X+1)(X-2).$$

Donc $\mathrm{Sp}(f)=\{-1,1,2\}$. f étant un endomorphisme de E avec $\dim(E)=3$ et f 3 valeurs propres distinctes donc f est diagonalisable. On a déjà déterminé E_1 et E_{-1}. Or,

$$A-2I_2=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-4&-1&4\\5&-1&-5\end{pmatrix}$$

On sait que $\dim(E_2) = 1$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_2$ donc $E_2 = \mathrm{Vect}(1+X^2)$. On peut donc considérer la base $\underline{\mathcal{B}' = \{1+X+X^2, 2X-X^2, 1+X^2\}}$.

3. On vérifie sans difficulté que φ est symétrique, bilinéaire, positive et définie, donc c'est un produit scalaire.
4. (a) Montrons que E_{-1} et E_1 sont orthogonaux. Cela revient à montrer que $1+X+X^2$ et $2X-X^2$ sont orthogonaux. Or :

$$\varphi(1+X+X^2, 2X-X^2) = 1 \times 0 + 1 \times 2 + 21 \times (-1) = 2 - 2 = 0$$

Donc $\underline{E_{-1} \text{ et } E_1 \text{ sont orthogonaux}}$.

(b) $\varphi(1+X+X^2, 1+X^2) = 1+0+2 = 3 \neq 0$ donc la base $\underline{\mathcal{B}' \text{ n'est pas orthogonale}}$.

5. (a) On a $\mathcal{C} = \mathcal{B}'$ donc c'est une base de E.

(b) On peut choisir $Q_1 = 1+X+X^2$ et $Q_2 = 2X-X^2$ puisqu'ils sont orthogonaux. On cherche donc Q_3 sous la forme :

$$Q_3 = 1+X^2+\alpha Q_1 + \beta Q_2$$

et on veut : $\varphi(Q_3, Q_1) = 0$ et $\varphi(Q_3, Q_2) = 0$ i.e. $1+2+\alpha(1+1+2) = 0$ et $-2+\beta(4+2) = 0$ i.e. $\alpha = -3/4$ et $\beta = 1/3$. Finalement,

$$Q_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{12}X - \frac{1}{12}X^2$$

(c) $||Q_1||^2 = \varphi(Q_1, Q_1) = 1+1+2 = 4$, $||Q_2||^2 = \varphi(Q_2, Q_2) = 4+2 = 6$ et $||Q_3||^2 = \varphi(Q_3, Q_3) = 1/16 + 1/144 + 2/144 = 12/144$

6. (a) La famille $\left\{\frac{Q_1}{||Q_1||}, \frac{Q_2}{||Q_2||}, \frac{Q_3}{||Q_3||}\right\}$ est une b.o.n. de E donc :

$$P = \frac{1}{||Q_1||^2}\varphi(P, Q_1)Q_1 + \frac{1}{||Q_2||^2}\varphi(P, Q_2)Q_2 + \frac{1}{||Q_3||^2}\varphi(P, Q_3)Q_3$$

d'où $\underline{\alpha = \frac{\varphi(P, Q_1)}{||Q_1||^2}, \beta = \frac{\varphi(P, Q_2)}{||Q_2||^2} \text{ et } \gamma = \frac{\varphi(P, Q_3)}{||Q_3||^2}}$.

(b) $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ est une base de E donc $\underline{\mathrm{Vect}(Q_1) \text{ et } \mathrm{Vect}(Q_2, Q_3) \text{ sont supplémentaires dans } E}$.

(c) En notant p le projeté sur F et parallèlement à G, on a : pour tout $P \in E$,

$$p(P) = \frac{1}{||Q_1||^2}\varphi(P, Q_1)Q_1 = \frac{1}{4}\varphi(P, 1+X+X^2)(1+X+X^2).$$

Donc :

$$p(1) = p(X) = \frac{1}{4}(1+X+X^2) \quad \text{et} \quad p(X^2) = \frac{1}{2}(1+X+X^2)$$

En notant M la matrice p dans la base canonique de E, on a donc :

$$\underline{M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}.$$

Exercice 2.

1. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X=n)$ converge et a pour somme 1. Or :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ap^n = a\frac{p}{1-p}.$$

Donc $\underline{a = \frac{1-p}{p}}$.

2. Soit $k\in\mathbb{N}^*$, alors $T_k = \bigcup_{n\geq k}(X=n)$. Donc :

$$\mathbb{P}(T_k) = \sum_{n=k}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n) = \frac{1-p}{p}\frac{p^k}{1-p} = p^{k-1}.$$

3. (a) Soit $k\in\mathbb{N}^*$ et $j\in\mathbb{N}^*$ tel que $j\geq k$. Alors

$$\underline{\mathbb{P}(S_k|L_j) = \binom{j}{k}\lambda^k(1-\lambda)^{j-k}}$$

(b) Tout d'abord, $S_k\cap T_k = S_k$ puisque $S_k\subset T_k$. Donc, à l'aide de la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_k\cap T_k) = \mathbb{P}(S_k) &= \sum_{j=1}^{+\infty}\mathbb{P}_{L_j}(S_k)\mathbb{P}(L_j)\\
&= \sum_{j=k}^{+\infty}\mathbb{P}_{L_j}(S_k)\mathbb{P}(L_j)\\
&= \sum_{j=k}^{+\infty}\binom{j}{k}\lambda^k(1-\lambda)^{j-k}ap^j\\
&= a\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{j!}{k!(j-k)!}\lambda^k(1-\lambda)^{j-k}p^kp^{j-k}\\
&= a(\lambda p)^k\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{j!}{k!(j-k)!}((1-\lambda)p)^{j-k}\\
&= \frac{a}{k!}(\lambda p)^k\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{j!}{(j-k)!}((1-\lambda)p)^{j-k}\\
&= \frac{a}{k!}(\lambda p)^k\sum_{j=k}^{+\infty}j(j-1)\dots(j-k+1)((1-\lambda)p)^{j-k}
\end{aligned}$$

4. (a) $\forall x\in]-1,1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty}x^n$. La série $\sum_{n\geq 0}x^n$ est de rayon 1.

(b) Soit $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Alors la fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x \in]-R, R[, \ S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

Dans notre cas, on obtient :

$$\forall x \in]-1, 1[, \ f^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^{+\infty} j(j-1)\dots(j-k+1)x^{j-k}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(S_k \cap T_k) = \frac{a}{k!}(\lambda p)^k f^{(k)}((1-\lambda)p)$$

Avec l'indication, on a donc :

$$\mathbb{P}(S_k \cap T_k) = \frac{a}{k!}(\lambda p)^k \frac{k!}{(1-(1-\lambda)p)^{k+1}} = a\frac{(\lambda p)^k}{(1-(1-\lambda)p)^{k+1}}$$

Et ainsi :

$$\mathbb{P}(S_k | T_k) = \frac{\mathbb{P}(S_k \cap T_k)}{\mathbb{P}(T_k)} = ap\frac{\lambda^k}{(1-(1-\lambda)p)^{k+1}} = \underline{(1-p)\frac{\lambda^k}{(1-(1-\lambda)p)^{k+1}}}$$

FIN