TELECOLLE MAURIES Edouard
Enoncé

Exercice 01

On considère des sacs de billes S_1, S_2, ... tels que S_1 contient 3 billes jaunes et 2 billes vertes. Et tous les autres sacs S_2, S_3, ... contiennent 2 billes jaunes et 2 billes vertes.
On tire au hasard une bille de S_1 et on la met dans S_2.
Puis on tire une bille de S_2 et on la met dans S_3, ainsi de suite.
pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $E_n =$ « la bille tirée dans S_n est verte » et $P(E_n)$ sa probabilité.

1. Déterminer $P(E_1)$, $P_{E_1}(E_2)$, $P_{\overline{E}_1}(E_2)$ et $P(E_2)$.
2. Exprimer $P(E_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$ à l'aide de la formule des probabilités totales.
3. Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 0.4$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0.2\, u_n + 0.4$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 0.5.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Justifier que (u_n) est convergente et préciser sa limite. Conséquence pour $P(E_n)$ quand n est très grand ?

Indications : 1. Pour $P(E_2)$, on applique la formule des probabilités totales :
$P(E_2) = P_{E_1}(E_2)P(E_1) + P_{\overline{E}_1}(E_2)P(\overline{E}_1)$.
2. On applique encore la même formule : $P(E_{n+1} =) = P_{E_n}(E_{n+1})P(E_n) + P_{\overline{E}_n}(E_{n+1})P(\overline{E}_n)$. Si vous lisez la suite de l'énoncé, vous avez un moyen de voir si ce que vous avez trouvé est cohérent.
3-a On sent la récurrence.
3-b $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
3-c Toute suite croissante et majorée est ... Par ailleurs, nul besoin de trouver u_n en fonction de n. Vous savez que si $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l alors $l = f(l)$.

Exercice 02

Démontrer que :

$$A = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X],\, \exists\,(a,b,c) \in \mathbf{R}^3,\ P = a + (2a-3b)X + cX^2\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus 2.
En donner une base. A t-on $A = \mathbb{R}_2[X]$?

Indications : Plusieurs façons d'aborder l'exercice. On peut montrer que A est un $Vect$ d'une famille à trouver ou alors montrer que le polynôme nul est dans A, que la somme de deux polynômes de A est dans A et que le produit par α d'un polynôme de$A$ est dans A.
Pour l'égalité $A = \mathbb{R}_2[X]$, pensez aux dimensions des deux espaces vectoriels.

Correction

Exercice 01

Exercice 02