TELECOLLE TARAWNEH Quentin

Enoncé

Exercice 01

1. Résoudre (E) : $x^2y'(x)+y(x)=1$ dans $\mathbb{R}_-^\star$ et $\mathbb{R}_+^\star$.
2. On note f une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^\star$. Étudier la limite de f en 0^+.

Indications : 1. On rappelle la méthode : il faut commencer par résoudre l'équation homogène associée : $x^2y'(x)+y(x)=0$ en la mettant sous la forme $\dfrac{y'(x)}{y(x)}=f(x)$, où f est à déterminer. Puis on intègre : $\ln|y(x)|=\displaystyle\int f(x)\,dx$, on a alors $y(x)=Ku(x)$, avec K une constante et u une fonction à déterminer. Puis on applique la méthode de variation de la constante à $y(x)=K(x)u(x)$. On dérive cette égalité et on remplace dans $x^2y'(x)+y(x)=1$. On en déduit $K'(x)$ puis $K(x)$ et on injecte dans $y(x)$.
2. Toutes les solutions ne sont pas bornées autour de 0 sauf une. Laquelle ?

Exercice 02

Écrire sous forme factorisée le déterminant suivant, pour $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$,

$$V(a,b,c)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

Indications : On peut par exemple à chaque colonne enlever la suivante. Utiliser Sarrus serait une erreur !

Correction

Exercice 01

1. Il s'agit de résoudre

$$(E) : \ x^2y'(x) + y(x) = 1 \text{ dans } \mathbb{R}_-^\star \text{ et } \mathbb{R}_+^\star.$$

Attaquons pour commencer l'équation homogène associée : $x^2y'(x)+y(x) = 0$ en la mettant sous la forme $\dfrac{y'(x)}{y(x)} = f(x)$, où f est à déterminer. On écrit

$$\forall x \neq 0, \left[x^2y'(x) + y(x) = 0 \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{1}{x^2}\right].$$

En intégrant, $\ln|y(x)| = \dfrac{1}{x} + L$, où $L \in \mathbf{R}$. Donc, il existe $K \in \mathbf{R}$ et :

$$\forall x \neq 0, \ y(x) = K \exp\left(\frac{1}{x}\right).$$

Puis on applique la méthode de variation de la constante à $y(x) = K(x)u(x)$, en posant : $u(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Notre $y(x)$ vérifie l'équation complète.

$$x^2y'(x) + y(x) = x^2(K(x)u(x))'(x) + K(x)u(x) = x^2(K'(x)u(x) + u'K(x)) + K(x)u(x) = 1.$$

Il reste :

$$x^2y'(x) + y(x) = x^2K'(x)u(x) + x^2u'K(x) + K(x)u(x) = 1.$$

Comme $x^2u'(x) + u(x) = 0$, $x^2u'K(x) + K(x)u(x) = 0$. D'où :

$$x^2K'(x)u(x) = 1 \Rightarrow K'(x) = \frac{1}{x^2u(x)} = \frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{1}{x}\right).$$

Donc $K(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$. Il reste à écrire notre solution particulière :

$$y_p(x) = K(x)u(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\exp\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

En conclusion,

$$\text{l'ensemble des solutions est donc somme de } x \mapsto K\exp\left(\frac{1}{x}\right), \text{ où } K \in \mathbf{R} \text{ et de } y \mapsto 1.$$

2. On note f une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^\star$. La limite de f en 0^+ est en général infinie car $1/x$ tend alors vers $+\infty$. Seul le cas $K = 0$ permet d'avoir une valeur finie. Donc la seule fonction définie sur $\mathbf{R}$ et solution de l'équation différentielle est : $x \mapsto 1$.

Exercice 02

On veut écrire sous forme factorisée le déterminant suivant, pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$V(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

Suivons l'indication bien qu'il y ait d'autres pistes. On va à chaque colonne enlever la suivante. On a :

$$V(a,b,c) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

(Bien entendu, on ne touche pas à la dernière colonne car elle n'a pas de suivante.)
En développant selon la première ligne :

$$V(a,b,c) = \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b & b+c \end{vmatrix}.$$

On trouve : $V(a,b,c) = (a-b)(b-c)(c-a)$.