TELECOLLE MAGNE Julien
Enoncé

Exercice 01

Déterminer le rayon de convergence puis les sommes de :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}.$$

Indications : Pour le rayon de convergence, on rappelle la mêthode. On pose $u_n(x) = a_n x^n$ et on écrit $\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$. On fait tendre n vers $+\infty$ et on obtient $l|x|$.
Puis si $l|x| < 1$, la série converge absolument et si $l|x| > 1$, la série diverge grossièrement.
Dans le cas où $l = 0$, le rayon est donc infini et si $l = +\infty$, le rayon est nul.
Pour les sommes, on pense aux sommes usuelles (somme de suite géométriques, D.S.E usuels).

Exercice 02

1. u défini sur $\mathbb{R}_3[X]$ par $u(P)(X) = P(-1)X^2 + P(1)$ est-il un endomorphisme ?
2. Donner la matrice de u dans la base canonique.
3. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de u.

Indications : 1. On commence par montrer que u est linéaire en montrant que :
$u(P + \lambda Q) = u(P) + \lambda u(Q)$.
Puis, il faut montrer que si P est un polynôme de degré au plus 3, c'est pareil pour $u(P)$. Comme on a montré que u est linéaire, calculer $u(1)$, $u(X)$, $u(X^2)$ et $u(X^3)$ et vérifier que ce sont des polynômes de degré au plus 3 suffit. Et en plus on s'avance pour la question suivante.
2. On écrit les colonnes de la matrice qui sont $u(1)$, $u(X)$, $u(X^2)$ et $u(X^3)$ en fonction de 1, de X, de X^2 et de X^3.
3. Pour la diagonalisation, c'est classique.

Correction

Exercice 01

Exercice 02