TELECOLLE COSTES Martin

Enoncé

Exercice 01

1. Montrer que $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^x - 1}{\ln\left(1 - \sqrt{x^2 - 1}\right)}\, dx$ converge.
2. Soit f une fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$. Montrer que :
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1 + x^2}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{1 + x^2}\, dx,$$
après avoir montré que ces deux intégrales convergent.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)(1 + x^n)}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n\, dx}{(1 + x^2)(1 + x^n)}$.

Indications :

1. On pourra montrer que la fonction dans l'intégrale a des limites finies en 1 et $\sqrt{2}$.
2. Pour l'existence, on commence par majorer $|f(x)|$ par M pour tout $x \in \mathbf{R}$. Puis pour l'égalité, penser à un certain changement de variable.
3. On pourra faire le changement de variable $t = \frac{1}{x}$ dans la première intégrale puis sommer les.

Exercice 02

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $z \in \mathbb{C}$.

1. Donner le polynôme caractéristique de A. Est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$?
2. On choisit $z = 2i$. Calculer les racines carrées de z et résoudre : $t^2 - 2t + 1 - 2i = 0$.
Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
3. On choisit z de module 1. Donner les valeurs propres de A sous forme algébrique et trigonométrique.

Indications :

1. On posera δ et $-\delta$ les racines carrées de z. On pourra écrire le spectre de A en fonction de δ. On raisonnera selon que z est nul ou non.
2. L'équation $t^2 - 2t + 1 - 2i = 0$ est aussi $(t - 1)^2 = 2i$.
3. On rappelle que $1 + e^{i\phi} = 2e^{i\frac{\phi}{2}} \cos\left(\dfrac{\phi}{2}\right)$ et que $1 - e^{i\phi} = -2ie^{i\frac{\phi}{2}} \sin\left(\dfrac{\phi}{2}\right)$.

Correction

Exercice 01

Exercice 02