TELECOLLE PERTUS Charlotte
Enoncé

Exercice 01

On pose : $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer a pour que $U = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$ soit vecteur propre de A.
3. Soit $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, trouver deux réels b et c tels que $AV = bU + cV$.
4. Trouver la matrice $B = P^{-1}AP$ avec $P = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En déduire B^{2018} et A^{2018}.

Indications :
1. On calcule rapidement le polynôme caractéristique et on peut conclure.
2. On a trouvé (normalement) une seule valeur propre λ et on détermine une base de $E_\lambda(A)$. Il faut que U soit colinéaire à ce vecteur de base ce qui doit donner une seule valeur de a.
3. On connait U, on connait V, on connait AV et donc on calcule b et c par identification.
4. On remarque que B a la forme $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où α est à trouver. On utilise $PB = AP$.
Pour le calcul de B^n, on calcule B^2, , B^3 puis on devine et on fait une récurrence. On prend alors $n = 2018$.
Pour A^{2018}, on utilise $A^{2018} = PB^{2018}P^{-1}$, à calculer si vous avez le temps seulement (on donnera le résultat dans le corrigé).

Exercice 02

1. Montrer que la suite de terme général
$$w_n = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, dt$$
est bornée et que tous ses termes de rang impairs sont nuls.
2. En déduire la parité de $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n z^n$ et minorer son rayon de convergence.
3. ***Supplément au cas où il reste du temps*** :
Montrer que (w_{2n}) est une suite décroissante et que $w_{2n+2} + w_{2n} = \dfrac{2}{2n+1}$.

Indications :
1. Pour montrer que (w_n) est bornée, on pourra montrer et utiliser : $|\tan t| \leqslant 1$ pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$.
Puis, pour montrer que w_{2n+1} est nul, on utilise Michel de Chasles :
$$w_{2n+1} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \tan^{2n+1} t \, dt + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+1} t \, dt$$
puis, on fait le bon changement de variable dans la première intégrale.
2. Pour la parité, on remarquera que $f(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} w_{2p} z^{2p}$ et pour minorer son rayon de convergence, on remarquera que $|f(z)| \leqslant \sum_{p=1}^{+\infty} |w_{2p}||z|^{2p}$ et on utilisera le majorant de $|w_{2p}|$ trouvé à la première question.
3. Pour le supplément, on écrit $w_{2n+2} - w_{2n}$ sous forme d'une intégrale, puis on montrera que ce qui est dans l'intégrale est positif. Pour le calcul de $w_{2n+2} + w_{2n}$, on l'écrit aussi sous forme d'une intégrale et on remarquera que $\tan^{2n+2} t + \tan^{2n} t = \tan^{2n} t(1 + \tan^2 t)$ et que $1 + \tan^2 t$ est la dérivée de $\tan t$.

Correction

Exercice 01

Exercice 02