

TELECOLLE MONTEIL Maëva
Enoncé

Exercice 01

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ est convergente.
2. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n-1}.$$

En déduire la somme de la série précédente.

Indications :

1. Si $\sum_n u_n$ est une série à termes positifs, et si $u_n \sim v_n$, quand n tend vers $+\infty$, alors $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ convergent ensemble ou divergent ensemble. Attention, leur somme si elles convergent est différente! On se rappellera aussi les résultats sur la convergence ou divergence des séries de Riemann.
2. Pour calculer la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$, on commencera par écrire $S_N = \sum_{n=2}^N u_n$. Puis on l'arrangera. Puis on fera tendre N vers $+\infty$. Et on a la somme.

Exercice 02

Résoudre les équations, avec $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^*)^3$ fixé et x est l'inconnue :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix} = 0.$$

Indications :

Pour le premier déterminant, on peut par exemple faire :

$$C_3 \leftarrow C_2 - C_3, C_4 \leftarrow C_4 - C_2, C_2 \leftarrow C_2 - C_1.$$

Pour le deuxième déterminant, on peut faire :

$$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4.$$

On mettra alors ce qu'il faut en facteur puis on fera d'autres opérations élémentaires que je vous laisse trouver.

Correction

Exercice 01

Exercice 02