TELECOLLE ANSON Alexandra
Enoncé

Exercice 01

On réalise 400 fois la même expérience, dont la probabilité de succès est $0.8 = \dfrac{4}{5}$.
On suppose que les 400 expériences sont indépendantes.
Soit X le nombre de succès obtenus.
Quelle loi suit X ? Calculer $E(X)$ puis donner un minorant de :

$$P(300 < X < 340).$$

Indications :
Pour la loi de X, on ira chercher une loi usuelle connue.
Pour la minoration de $P(300 < X < 340)$, pensez à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 02

1. Pour quelles valeurs de n, $f(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'$ défini-t-il un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?
2. Lorsque $n = 2$, déterminer la matrice de f dans la base canonique et la diagonaliser.

Indications :
1. On commence par montrer que f est linéaire en montrant que $f(P+\lambda Q) = f(P)+\lambda f(Q)$. Puis, il faut montrer que si P est un polynôme de degré au plus n, c'est pareil pour $f(P)$. On pose $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
Puis on développe $f(P)$ sous la forme d'un polynôme de la forme $b_{n+1}X^{n+1} + Z_n$, où Z_n est un polynôme de degré n. Il faut que $b_{n+1} = 0$. Cela donne une seule valeur de n.
2. On écrit les colonnes de la matrice qui sont $f(1)$, $f(X)$, $f(X^2)$ en fonction de 1, de X et de X^2.
Pour la diagonalisation, c'est classique.

Correction

Exercice 01

On réalise 400 fois la même expérience, dont la probabilité de succès est $0.8 = \dfrac{4}{5}$.
On suppose que les 400 expériences sont indépendantes.
Soit X le nombre de succès obtenus.
Déjà, on remarque que : $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(400, \dfrac{4}{5}\right)$ et donc $E(X) = 400 \times \dfrac{4}{5} = 320$.
Puis : $V(X) = npq = 320 \times \dfrac{1}{5} = 64$. Puis :

$$(300 < X < 340) = \big(|X - E(X)| < 20\big)$$

est l'événement contraire de $\big(|X - E(X)| \geqslant 20\big)$.
Rappelons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

Soit X une variable aléatoire réelle discrète, alors :

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0,\ P\big(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.}$$

Donc ici :

$$P\big(|X - E(X)| \geqslant 20\big) \leqslant \frac{V(X)}{20^2} = \frac{64}{400}.$$

Donc : $P(300 < X < 340) = 1 - P\big(|X - E(X)| \geq 20\big) \geqslant \dfrac{21}{25}$.

Exercice 02

1. Pour quelles valeurs de n, $f(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'$ défini-t-il un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?
On commence par montrer que f est linéaire en montrant que $f(P + \lambda Q) = f(P) + \lambda f(Q)$, pour tout couple (P, Q) de polynômes de $(\mathbb{R}_n[X])^2$. On écrit :

$$f(P+\lambda Q) = (2X+1)(P+\lambda Q) - (X^2-1)(P+\lambda Q)' = (2X+1)P - (X^2-1)P' + \lambda((2X+1)Q - (X^2-1)Q').$$

La dernière quantité est bien : $f(P) + \lambda f(Q)$.
Pour la suite, il faut montrer que si P est un polynôme de degré au plus n, c'est pareil pour $f(P)$.
On pose $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
Puis on va développer $f(P)$ sous la forme d'un polynôme de la forme $b_{n+1}X^{n+1} + Z_n$, où Z_n est un polynôme de degré n.
Ici :

$$f\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) = (2X+1)\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) - (X^2-1)\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)'.$$

Cela donne :

$$f\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) = (2X+1)\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) - (X^2-1)\left(\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}\right).$$

On développe et on isole les termes de plus haut degré c'est-à-dire de degré $n+1$. C'est :

$$2a_n - na_n.$$

Donc $b_{n+1} = (2-n)a_n$. Il faut que $b_{n+1} = 0$, pour que $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ et donc :

$$f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X] \text{ si et seulement si } n = 2.$$

2. Lorsque $n = 2$, déterminons la matrice de f dans la base canonique.
On écrit les colonnes de la matrice qui sont $f(1)$, $f(X)$, $f(X^2)$ en fonction de 1, de X et de X^2. On a :

$$f(1) = (2X+1)1 - (X^2-1)0 = 2X+1,\ f(X) = (2X+1)X - (X^2-1)1 = X^2+X+1 \text{ et}$$
$$f(X^2) = (2X+1)X^2 - (X^2-1)2X = X^2+2X.$$

On a la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il reste à trouver le polynôme caratéristique :

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 0 \\ -2 & t-1 & -2 \\ 0 & -1 & t-1 \end{vmatrix}.$$

On trouve après calculs, $\chi_A(t) = (t-1)(t-3)(t+1)$.
Le spectre est : $\{-1, 1, 3\}$. Comme les trois valeurs propres sont distinctes (en dimension 3), A est diagonalisable. Il reste à trouver les trois sous-espaces propres, il faut résoudre les trois systèmes :

$$AX = -X,\ AX = X,\ AX = 3X,$$

où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On trouve $E_{-1}(A) = \text{Vect}\left((1,-2,1)\right)$, $E_1(A) = \text{Vect}\left((1,0,-1)\right)$ et $E_3(A) = \text{Vect}\left((1,2,1)\right)$.
Alors :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Et : $A = PDP^{-1}$.