TELECOLLE COSTES Martin
Enoncé

Exercice 01

1. Montrer que $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^x - 1}{\ln\left(1 - \sqrt{x^2 - 1}\right)}\,dx$ converge.
2. Soit f une fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$. Montrer que :
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x^2}\,dx,$$
après avoir montré que ces deux intégrales convergent.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n\,dx}{(1+x^2)(1+x^n)}$.

Indications :
1. On pourra montrer que la fonction dans l'intégrale a des limites finies en 1 et $\sqrt{2}$.
2. Pour l'existence, on commence par majorer $|f(x)|$ par M pour tout $x \in \mathbf{R}$. Puis pour l'égalité, penser à un certain changement de variable.
3. On pourra faire le changement de variable $t = \frac{1}{x}$ dans la première intégrale puis sommer les.

Exercice 02

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $z \in \mathbb{C}$.

1. Donner le polynôme caractéristique de A. Est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$?
2. On choisit $z = 2i$. Calculer les racines carrées de z et résoudre : $t^2 - 2t + 1 - 2i = 0$.
Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
3. On choisit z de module 1. Donner les valeurs propres de A sous forme algébrique et trigonométrique.

Indications :
1. On posera δ et $-\delta$ les racines carrées de z. On pourra écrire le spectre de A en fonction de δ. On raisonnera selon que z est nul ou non.
2. L'équation $t^2 - 2t + 1 - 2i = 0$ est aussi $(t-1)^2 = 2i$.
3. On rappelle que $1 + e^{i\phi} = 2e^{i\frac{\phi}{2}} \cos\left(\dfrac{\phi}{2}\right)$ et que $1 - e^{i\phi} = -2ie^{i\frac{\phi}{2}} \sin\left(\dfrac{\phi}{2}\right)$.

Correction

Exercice 01

1. Montrons que $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^x - 1}{\ln\left(1 - \sqrt{x^2-1}\right)}\,dx$ converge.

On pose $\phi(x) = \dfrac{x^x - 1}{\ln\left(1 - \sqrt{x^2-1}\right)}$. Alors, déjà, $x \mapsto x^x - 1$ est définie pour $x > 0$. Puis :

$$1 - \sqrt{x^2-1} > 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ et } 1 > \sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow x > 1 \text{ et } 2 > x^2.$$

Donc $x \in]1, \sqrt{2}[$. La fonction ϕ est continue sur $]1, \sqrt{2}[$.
Les seuls problèmes sont aux bornes pour l'existence de l'intégrale.
Montrons que la fonction dans l'intégrale a des limites finies en 1 et $\sqrt{2}$.
• En $x = 1$, on pose $x = 1 + h$ car on a une forme indéterminée,

$$\phi(1+h) = \frac{\exp((1+h)\ln(1+h)) - 1}{\ln\left(1 - \sqrt{(1+h)^2 - 1}\right)} = \frac{\exp((1+h)(h+o(h)) - 1}{\ln\left(1 - \sqrt{2h+h^2}\right)}.$$

Cela donne :

$$\phi(1+h) = \frac{\exp(h+o(h)) - 1}{-\sqrt{2h} + o(h)} = \frac{h+o(h)}{-\sqrt{2h}+o(h)},$$

quantité qui tend vers 0 quand h tend vers 0.
• En $x = \sqrt{2}$, on remarque que :

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} x^x - 1 = \lim_{x\to\sqrt{2}} e^{x\ln x} - 1 = \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2\right) - 1.$$

De plus,

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} \ln\left(1 - \sqrt{x^2-1}\right) = \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty.$$

Donc : $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{2}} \phi(x) = 0$.

Ainsi, $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^x - 1}{\ln\left(1 - \sqrt{x^2-1}\right)}\,dx$ converge ;

2. Soit f une fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$. Montrons que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x^2}\,dx,$$

après avoir montré que ces deux intégrales convergent.

• Montrons l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}\,dx$.

On commence par majorer $|f(x)|$ par M pour tout $x \in \mathbf{R}$. On a :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \left|\frac{f(x)}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{M}{1+x^2}.$$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ est convergente donc la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{1+x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

L'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x^2}\,dx$ se fait de même.

• Egalité des deux intégrales.

On pose le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$ dans la première intégrale.

On a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}\, dx = \int_{+\infty}^0 \frac{f\left(\dfrac{1}{t}\right)}{1+\dfrac{1}{t^2}} \times \frac{-1}{t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{1+t^2}\, dt.$$

3. Calculons $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n\, dx}{(1+x^2)(1+x^n)}$.

Attaquons la première intégrale avec le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$. On a :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)} = \int -+\infty^0 \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{t^n}\right)} \times \frac{-1}{t^2}\, dt.$$

D'où :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)} = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{(t^2+1)\,(1+t^n)}\, dt.$$

Alors :

$$2I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)}\, dx + \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(x^2+1)\,(1+x^n)}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}\, dx.$$

Cela donne finalement :

$$2I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

On a : $I = \dfrac{\pi}{4}$.
En conclusion,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)} = \int_0^{+\infty} \frac{x^n\, dx}{(1+x^2)(1+x^n)} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 02

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $z \in \mathbb{C}$. Donnons le polynôme caractéristique de A.

On écrit :

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -z \\ -1 & t-1 & 0 \\ -1 & 0 & t-1 \end{vmatrix}.$$

Par exemple, on développe selon la première ligne et :

$$\chi_A(t) = (t-1)^3 - z(t-1) = (t-1)((t-1)^2 - z).$$

On pose δ et $-\delta$ les racines carrées de z.
- Alors si $z \neq 0$,

$$(t-1)^2 = z \Leftrightarrow t-1 = \pm\delta \Leftrightarrow t = 1+\delta \text{ ou } t = 1-\delta.$$

On a deux racines distinctes et donc le spectre a trois valeurs distinctes,

$$\operatorname{Sp} A = \{1,\, 1+\delta,\, 1-\delta\}.$$

Donc A est alors diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$.

• Si $z=0$, 1 est une valeur propre triple et alors si A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$, A est semblable à I_3 donc égale à I_3. C'est absurde car $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I_3$.

Donc A n'est pas diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$.

2. On choisit $z=2i$. Calculons les racines carrées de z.

On pose :

$$z=2i=\delta^2=2e^{i\frac{\pi}{2}+2k\pi},$$

où k est un entier relatif. On pose alors $z=\rho e^{i\theta}$ et on trouve $\rho=\sqrt{2}$ et $\theta=\frac{\pi}{4}$ ou $\theta=\frac{\pi}{4}+\pi$. Alors :

$$\delta=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ ou } \delta=-\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

, ce qui donne :

$$\delta=1+i \text{ ou } \delta=-1-i.$$

Puis résolvons $t^2-2t+1-2i=0$.

On écrit :

$$t^2-2t+1-2i=(t-1)^2-2i=0.$$

Donc pas besoin de calculer le discriminant. On remarque que $t=1\pm\delta$. Il reste pour solutions de l'équation :

$$t=1+1+i=2+i \text{ et } t=1-1-i=-i.$$

Déterminеons les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

Ici : $\operatorname{Sp} A=\{1,\, 2+i,\, -i\}$.

Pour les trois sous-espaces propres, il faut résoudre les trois systèmes :

$$AX=X,\ AX=(2+i)X,\ AX=-iX,$$

où $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On trouve un vecteur de base (car les dimensions sont toutes égales à 1). On vous laisse finir.

3. On choisit z de module 1. Donnons les valeurs propres de A sous forme algébrique et trigonométrique.

Ici $z=e^{i\theta}$ et donc il s'agit de résoudre : $(t-1)^2=e^{i\theta}$.

Alors :

$$t=1+e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ et } t=1-e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

On rappelle que $1+e^{i\phi}=2e^{i\frac{\phi}{2}}\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$ et que $1-e^{i\phi}=-2ie^{i\frac{\phi}{2}}\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$.

Ici, on applique avec $\phi=\theta/2$.

On trouve :

$$t=2e^{i\frac{\theta}{4}}\cos\left(\frac{\theta}{4}\right) \text{ et } t=-2ie^{i\frac{\theta}{4}}\sin\left(\frac{\theta}{4}\right).$$

Finalement,

$$\operatorname{Sp} A=\left\{e^{i0},\, 2e^{i\frac{\theta}{4}}\cos\left(\frac{\theta}{4}\right),\, -2ie^{i\frac{\theta}{4}}\sin\left(\frac{\theta}{4}\right)\right\}.$$

Ou encore :

$$\operatorname{Sp} A=\left\{e^{i0},\, 2\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)e^{i\frac{\theta}{4}},\, 2\sin\left(\frac{\theta}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)}\right\}.$$

Sous forme algébrique,

$$\operatorname{Sp} A=\{1,\, 1+i,\, 1-i\}.$$