TELECOLLE MAGNE Julien

Enoncé

Exercice 01

Déterminer le rayon de convergence puis les sommes de :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}.$$

Indications : Pour le rayon de convergence, on rappelle la mêthode. On pose $u_n(x) = a_n x^n$ et on écrit $\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$. On fait tendre n vers $+\infty$ et on obtient $l|x|$.
Puis si $l|x| < 1$, la série converge absolument et si $l|x| > 1$, la série diverge grossièrement.
Dans le cas où $l = 0$, le rayon est donc infini et si $l = +\infty$, le rayon est nul.
Pour les sommes, on pense aux sommes usuelles (somme de suite géométriques, D.S.E usuels).

Exercice 02

1. u défini sur $\mathbb{R}_3[X]$ par $u(P)(X) = P(-1)X^2 + P(1)$ est-il un endomorphisme ?
2. Donner la matrice de u dans la base canonique.
3. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de u.

Indications : 1. On commence par montrer que u est linéaire en montrant que :
$u(P + \lambda Q) = u(P) + \lambda u(Q)$.
Puis, il faut montrer que si P est un polynôme de degré au plus 3, c'est pareil pour $u(P)$. Comme on a montré que u est linéaire, calculer $u(1)$, $u(X)$, $u(X^2)$ et $u(X^3)$ et vérifier que ce sont des polynômes de degré au plus 3 suffit. Et en plus on s'avance pour la question suivante.
2. On écrit les colonnes de la matrice qui sont $u(1)$, $u(X)$, $u(X^2)$ et $u(X^3)$ en fonction de 1, de X, de X^2 et de X^3.
3. Pour la diagonalisation, c'est classique.

Correction

Exercice 01

Déterminons le rayon de convergence puis les sommes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}.$$

• • Pour le rayon de convergence, on rappelle la methode. On pose $u_n(x) = a_n x^n$ et on écrit $\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$. On fait tendre n vers $+\infty$ et on obtient $l|x|$.
Puis si $l|x| < 1$, la série converge absolument et si $l|x| > 1$, la série diverge grossièrement.
Dans le cas où $l = 0$, le rayon est donc infini et si $l = +\infty$, le rayon est nul.
Ici, pour $u_n(x) = \frac{x^n}{2^n}$,

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{x^n}{2^n}}\right| = \left|\frac{x}{2}\right|,$$

quantité qui tend vers $\frac{|x|}{2}$. Donc si $|x| < 2$, la série converge absolument et si $|x| > 2$, elle diverge grossièrement. Donc $R = 2$.
Puis, pour $u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$,

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n+2}}{\frac{(-1)^n x^n}{n+1}}\right| = \left|\frac{(n+1)x}{n+2}\right|,$$

quantité qui tend vers $|x|$ quand n tend vers $+\infty$. Donc si $|x| < 1$, la série converge absolument et si $|x| > 1$, elle diverge grossièrement. Donc $R = 1$.
• Pour le calcul de la première somme, pour tout $x \in]-2, 2[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

car on reconnait la somme d'une série géométrique.
Pour la deuxième somme, pour tout $x \in]-1, 1[$, posons

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = S(x).$$

Attention, $S(x)$ n'est pas tout à fait la somme qu'on veut calculer car il y a x^{n+1} à la place de x^n. Alors, pour tout $x \in]-1, 1[$, $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$. On reconnait (encore) la somme d'une série géométrique.
Donc, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}.$$

Donc, pour tout $x \in]-1, 1[$, $S(x) = \ln(1+x) + K$, où K est une constante.
Comme $S(0) = 0$, $K = 0$.

Puis,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1} = \frac{S(x)}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

On remarque que notre somme vaut 1 en $x = 0$.

Exercice 02

1. u est défini sur $\mathbb{R}_3[X]$ par $u(P)(X) = P(-1)X^2 + P(1)$.
On commence par montrer que u est linéaire en montrant que :
$u(P + \lambda Q) = u(P) + \lambda u(Q)$, pour tout couple de polynôme (P, Q). On a :

$$u(P + \lambda Q)(X) = (P + \lambda Q)(-1)X^2 + (P + \lambda Q)(1) = P(-1)X^2 + P(1) + \lambda(P(-1)X^2 + P(1)).$$

C'est bien $u(P) + \lambda u(Q)$.
Puis, il reste à montrer que si P est un polynôme de degré au plus 3, c'est pareil pour $u(P)$. Comme on a montré que u est linéaire, calculer $u(1)$, $u(X)$, $u(X^2)$ et $u(X^3)$ et vérifier que ce sont des polynômes de degré au plus 3 suffit. On a :

$$\text{Si } P = 1,\ u(1)(X) = X^2 + 1 \text{ car } P(-1) = P(1) = 1.$$

$$\text{Si } P = X,\ u(X)(X) = -X^2 + 1 \text{ car } P(-1) = -1 \text{ et } P(1) = 1.$$

$$\text{Si } P = X^2,\ u(X^2)(X) = X^2 + 1 \text{ car } P(-1) = P(1) = 1.$$

$$\text{Si } P = X^3,\ u(1)(X) = -X^2 + 1 \text{ car } P(-1) = -1 \text{ et } P(1) = 1.$$

On en déduit que $u(1)$, $u(X)$, $u(X^2)$ et $u(X^3)$ sont des polynômes de degré au plus 2 donc au plus 3.
2. Donnons la matrice de u dans la base canonique.
On écrit les colonnes de la matrice qui sont $u(1)$, $u(X)$, $u(X^2)$ et $u(X^3)$ en fonction de 1, de X, de X^2 et de X^3. Si U est la matrice cherchée,

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Trouvons les valeurs propres et les sous-espaces propres de u.
On peut chercher le polyôme caractéristique :

$$\chi_U(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ -1 & 1 & t-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{vmatrix}.$$

Un développement selon la dernière ligne donne :

$$\chi_U(t) = t \begin{vmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ 0 & t & 0 \\ -1 & 1 & t-1 \end{vmatrix}.$$

Puis un développerment selon la deuxième ligne donne :

$$\chi_U(t) = t^2 \begin{vmatrix} t-1 & -1 \\ -1 & t-1 \end{vmatrix}.$$

Il reste : $\chi_U(t) = t^2((t-1)^2 - 1) = t^2(t-2)t = t^3(t-2)$.

Pour les sous-espaces propres, le premier est le noyau donc si l'on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ alors on résout :

$$UX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cela donne : $x + y + z + t = 0$ et $x - y + z - t = 0$.
C'est un sous-espace vectoriel de dimension 2.

Le second sous-espace propre est $E_2(U)$. Si l'on pose toujours $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ alors on résout :

$$UX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Cela donne :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x + y + z + t & = & 2x \\ y & = & 2y \\ x - y + z - t & = & 2z \\ t & = & 2t \end{array} \right.$$

Cela donne ensuite :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} -x + z & = & 0 \\ y & = & 0 \\ x - z & = & 0 \\ t & = 0 & \end{array} \right.$$

$(x, y, z, t) = (x, 0, x, 0) = x(1, 0, 1, 0)$. Le vecteur $(1, 0, 1, 0)$ est une base de $E_2(U)$ qui est donc de dimension 1.
On peut en déduire que la somme des dimensions des deux sous-espaces propres est $2 + 1 = 3$ et $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$. Comme $3 < 4$, u n'est pas diagonalisable.