TELECOLLE MONTEIL Maëva

Enoncé

Exercice 01

1. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$ est convergente.
2. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n-1}.$$
En déduire la somme de la série précédente.

Indications :
1. Si $\sum_n u_n$ est une série à termes positifs, et si $u_n \sim v_n$, quand n tend vers $+\infty$, alors $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ convergent ensemble ou divergent ensemble. Attention, leur somme si elles convergent est différente !
On se rappelera aussi les résultats sur la convergence ou divergence des séries de Riemann.
2. Pour calculer la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$, on commencera par écrire $S_N = \sum_{n=2}^{N} u_n$. Puis on l'arrangera. Puis on fera tendre N vers $+\infty$. Et on a la somme.

Exercice 02

Résoudre les équations, avec $(a,b,c) \in (\mathbb{R}^\star)^3$ fixé et x est l'inconnue :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix} = 0.$$

Indications :
Pour le premier déterminant, on peut par exemple faire :

$$C_3 \leftarrow C_2 - C_3,\ C_4 \leftarrow C_4 - C_2,\ C_2 \leftarrow C_2 - C_1.$$

Pour le deuxième déterminant, on peut faire :

$$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4.$$

On mettra alors ce qu'il faut en facteur puis on fera d'autres opérations élémentaires que je vous laisse trouver.

Correction

Exercice 01

1. Montrons que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$ est convergente.

Si $\sum_n u_n$ est une série à termes positifs, et si $u_n \sim v_n$, quand n tend vers $+\infty$, alors $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ convergent ensemble ou divergent ensemble. Ici :

$$u_n = \frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2}$$

quand n tend vers $+\infty$. Or la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. On rappelle que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$. Ici $\alpha = 2 > 1$.
Donc la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$ est convergente.

2. Déterminons $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n-1}.$$

On écrit : $\frac{a}{n} + \frac{b}{n-1} = \frac{(a+b)n - a}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)}$.
Cela implique :

$$\forall n,\ (a+b)n - a = 0 \Rightarrow a = -b \text{ et } -a = 1.$$

Donc : $a = -1$ et $b = 1$. On écrit :

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{-1}{n} + \frac{1}{n-1}.$$

On va en déduire la somme de la série précédente. On commence par écrire :

$$S_N = \sum_{n=2}^{N} u_n = \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{-1}{n} + \frac{1}{n-1} \right).$$

Ainsi :

$$S_N = -\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1}.$$

On change d'indice dans la deuxième somme :

$$S_N = -\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}.$$

Cela donne :

$$S_N = -\frac{1}{N} - \sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{n} + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{n} + \frac{1}{1}.$$

Ou encore :

$$S_N = -\frac{1}{N} + \frac{1}{1}.$$

Puis on fait tendre N vers $+\infty$. Et on a la somme : $S = 1$.

Exercice 02

• Résolvons l' équation, avec $(a,b,c) \in (\mathbb{R}^\star)^3$ fixé et x est l'inconnue :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

On peut (par exemple) faire :

$$C_3 \leftarrow C_2 - C_3,\ C_4 \leftarrow C_4 - C_2,\ C_2 \leftarrow C_2 - C_1.$$

Cela donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & a-x & 0 & -a \\ x & -x & -b & 0 \\ x & -x & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Puis, on développe selon la première ligne :

$$\begin{vmatrix} a-x & 0 & -a \\ -x & -b & 0 \\ -x & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on développe selon la première ligne,

$$(a-x)\begin{vmatrix} -b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} -x & 0-b \\ -x & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce qui donne : $b(a+c)x = abc$. Comme $b \neq 0$, $x = \dfrac{ac}{a+c}$ si $a+c \neq 0$ et il n'y a pas de solution si $a+c=0$.

• Résolvons l'équation, avec $(a,b,c) \in (\mathbb{R}^\star)^3$ fixé et x est l'inconnue :

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix} = 0.$$

On peut faire :

$$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4.$$

On obtient :

$$\begin{vmatrix} x+a+b+c & a & b & c \\ x+a+b+c & x & b & c \\ x+a+b+c & b & x & c \\ x+a+b+c & b & c & x \end{vmatrix} = 0.$$

Ou encore :

$$(x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & x & b & c \\ 1 & b & x & c \\ 1 & b & c & x \end{vmatrix} = 0.$$

Puis, on fait (par exemple) :

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1,\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2.$$

On obtient :

$$(x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & x-b & 0 \\ 0 & b-x & c-b & x-c \end{vmatrix} = 0.$$

On développe selon la première colonne :

$$(x+a+b+c)\begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 \\ b-a & x-b & 0 \\ b-x & c-b & x-c \end{vmatrix} = 0.$$

Ce qui donne :

$$(x+a+b+c)(x-a)(x-b)(x-c) = 0.$$

Ainsi les solutions sont : $\{a, b, c, -a-b-c\}$.